Centres étrangers juin 2008

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : A (2 ; 1 ; − 1), B (− 1 ; 2 ; 4), C (0 ; − 2 ; 3), D (1 ; 1 ; − 2) et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.
Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan P.
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$.
5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$
7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P .
8. Affirmation 8 : le point E $\left(-\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 - 2\,\mathrm{i}$ et $b = -a$.

Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6\,\mathrm{i}$.

c. Placer les points C et D sur le graphique Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système : {(A ; 1) ; (B ; − 1) ; (C ; α)} .

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = D$?

4. On suppose dans cette question que α = 2.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 4\sqrt{2}$.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 2 + 3\,\mathrm{i}$, $c = 3\,\mathrm{i}$, $d = -\dfrac{5}{2} + 3\,\mathrm{i}$ et $e = -\dfrac{5}{2}$.

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

b. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE.

c. Quel est l'angle de la similitude s ?

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est :

$$z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,\overline{z} + 2 + 3\,\mathrm{i} \text{ où } \overline{z} \text{ désigne le conjugué du nombre complexe } z.$$

b. Montrer que s' transforme OABC en BAED.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou* d'*initiative non fructueuse, sera prise en compte dans* l'*évaluation.*

Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

• les ingénieurs ;
• les opérateurs de production ;
• les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 %des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :

- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :

a. un agent de maintenance ;

b. une femme agent de maintenance ;

c. une femme,

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

• la probabilité qu'il n'*y* ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
• la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
• la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- • A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;
- • B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction *f*

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit *u* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour *x* appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Étude de la fonction *f*

a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de *f* et construire le tableau de variations de la fonction *f* .

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C .

b. Déterminer la position de C par rapport à (Δ).

c. Tracer la courbe C et la droite (Δ).

III Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe C, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathscr{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$

b. Déterminer la limite ℓ de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou* d'*initiative non fructueuse. sera prise en compte dans* l'*évaluation.*

Démontrer que $\ell = \mathscr{A}\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : **VRAIE**

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 1 ; 5) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 2 ; – 3 ; 4), ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

2. Affirmation 2 : **FAUSSE**

$2 - 2 \times 1 - 1 + 1 = 0$ donc A $\in$ P ; $0 - 2 \times (-2) + 3 + 1 \neq 0$ donc C $\notin$ P donc la droite (AC) n'est pas incluse dans le plan P.

3. Affirmation 3 : **VRAIE**

Soit Π le plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 1 ; 5) et $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (– 1 ; 0 ; – 1), ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et D définissent un plan.

$2 + 8 + 1 - 11 = 0$ donc A $\in \Pi$

$-1 + 16 - 4 - 11 = 0$ donc B $\in \Pi$

$1 + 8 + 2 - 11 = 0$ donc D $\in \Pi$ donc le plan Π contient les points A, B, D donc une équation du plan (ABD) est $x + 8y - z - 11 = 0$.

4. Affirmation 4 : **FAUSSE**

Vérifions que le point A appartient à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$). Est-il possible de trouver k tel que $\begin{cases} 2 = 2k \\ 1 = 2 + 3k \\ -1 = 3 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\dfrac{1}{3} \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$).

5. Affirmation 5 : **FAUSSE**

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 1 ; 5) et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (1 ; 3 ; – 5), donc $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} = -3 + 3 - 25 \neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

6. Affirmation 6 : **FAUSSE**

la distance du point C au plan P est égale $\dfrac{|0 + 4 + 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} \neq 4\sqrt{6}$.

7. Affirmation 7 : **VRAIE**

la distance du point D au plan P est égale $\dfrac{|1 - 2 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ donc la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P .

8. Affirmation 8 : **VRAIE**

$\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{8}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{EC}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; – 2 ; 1) normal au plan P.

$-\dfrac{4}{3} - 2 \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} + 1 = 0$ donc le point E appartient au plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

donc le point E $\left(-\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$, $\Delta = 4^2 - 8 \times 4 = -16 = (4\,\mathrm{i})^2$ donc $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$ ou $z_2 = -2 - 2\,\mathrm{i}$

$z_1 = 2(-1 + \mathrm{i})$ donc $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ à 2π près.

z_1 et z_2 sont conjugués donc $|z_2| = |z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = -\arg(z_1)$ donc $\arg(z_2) = -\dfrac{3\pi}{4}$ à 2π près.

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-3\pi}{4}\right)$

2. *a*. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' - z_O = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ soit $z' = \mathrm{i}\,z$

L'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est $c = \mathrm{i}\,b = \mathrm{i}(-2 + 2\,\mathrm{i}) = -2 - 2\,\mathrm{i}$

b. La rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' - z_A = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ soit $z' - (2 - 2\,\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,[z - (2 - 2\,\mathrm{i})]$

L'affixe d du point D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; vérifie $d - (2 - 2\,\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,[c - (2 - 2\,\mathrm{i})]$

$d - (2 - 2\,\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,[-2 - 2\,\mathrm{i} - (2 - 2\,\mathrm{i})]$ donc $d = 2 - 2\,\mathrm{i} - 4\,\mathrm{i}$ donc l'affixe d du point D est $d = 2 - 6\,\mathrm{i}$.

c. Le milieu de [BD] est le point d'affixe $\dfrac{b + d}{2} = \dfrac{-2 + 2\,\mathrm{i} + 2 - 6\,\mathrm{i}}{2} = -2\,\mathrm{i}$

Le milieu de [AC] est le point d'affixe $\dfrac{a + c}{2} = \dfrac{2 - 2\,\mathrm{i} - 2 - 2\,\mathrm{i}}{2} = -2\,\mathrm{i}$

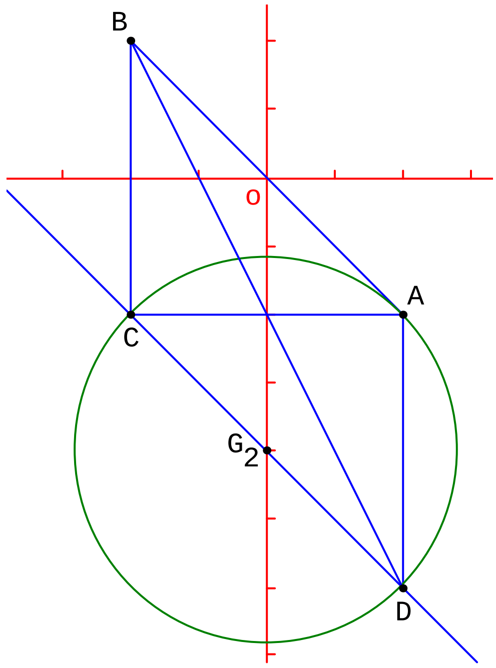
Les segments [AC] et [BD] ont le même milieu donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système : {(A ; 1) ; (B ; − 1) ; (C ; α)} .

a. G_α, est le barycentre du système : {(A ; 1) ; (B ; − 1) ; (C ; α)} donc pour tout point M du plan :

$(1 - 1 + \alpha)\,\overrightarrow{MG_\alpha} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \alpha\,\overrightarrow{MC}$ donc en choisissant M = C : $\alpha\,\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \alpha\,\overrightarrow{CC}$ donc $\alpha\,\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA}$.

b. $\alpha \neq 0$ et $\alpha\,\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA}$ soit $\overrightarrow{CG_\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CG_\alpha}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{CG_\alpha}$ n'est pas nul, donc l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls est la droite parallèle en C à la droite (AB) privée de C soit la droite (CD) privée de C.



c. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

et $\alpha\,\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA}$ donc $G_\alpha = D$ quand $\alpha = 1$.

4. $\alpha = 2$ donc $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ donc G_2 est le milieu de [CD].

Pour tout point M du plan : $(1 - 1 + 2)\,\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$ donc

$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left\|2\,\overrightarrow{MG_2}\right\| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow MG_2 = 2\sqrt{2}$

L'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2}$ est le cercle de centre G_2 de rayon $2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ donc $CG_2 = 2\sqrt{2}$ donc le cercle passe par C.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

2. $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (2 ; 0) et $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées (2 ; 0) donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ donc le quadrilatère OABC est un parallélogramme. $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées (0 ; 3) donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ donc le quadrilatère OABC est un rectangle.
Le rectangle OABC a pour longueur OC = 3 et pour largeur OA = 2.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 ; 3) et $\overrightarrow{ED}$ a pour coordonnées (0 ; 3) donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ donc le quadrilatère ABDE est un parallélogramme. $\overrightarrow{EA}$ a pour coordonnées (4,5 ; 0) donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} = 0$ donc le quadrilatère ABDE est un rectangle.
Le rectangle ABDE a pour longueur AE = 4,5 et pour largeur AB = 3.
$\frac{AE}{AB} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$ or $\frac{OC}{OA} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ donc $\frac{OC}{OA} = \frac{AE}{AB}$ donc OABC et ABDE sont deux rectangles et ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. s est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme : $z' = a\,z + b$

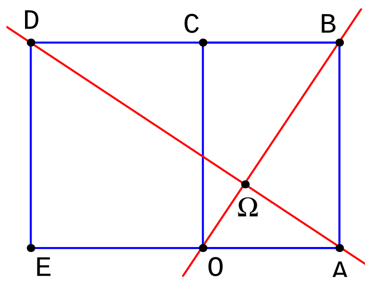
s(O) = A et s(A) = B $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a \times 0 + b \\ 2 + 3\,\mathrm{i} = a \times 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \end{cases}$

L'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B est $z' = \frac{3}{2}\mathrm{i}\,z + 2$

b. s transforme B en B' d'affixe b' telle que $b' = \frac{3}{2}\mathrm{i}\,b + 2$ donc $b' = \frac{3}{2}\mathrm{i}\,(2 + 3\,\mathrm{i}) + 2$ donc $b' = 3\,\mathrm{i} - \frac{9}{2} + 2$ soit $b' = -\frac{5}{2} + 3\,\mathrm{i}$
$b' = d$ donc s(B) = D.
s transforme C en C' d'affixe c' telle que $c' = \frac{3}{2}\mathrm{i}\,c + 2$ donc $c' = \frac{3}{2}\mathrm{i} \times 3\,\mathrm{i} + 2$ donc $c' = -\frac{9}{2} + 2$ soit $c' = -\frac{5}{2} = e$ donc s(C) = E.
la similitude s transforme OABC en ABDE.

c. L'écriture complexe de s est $z' = \frac{3}{2}\mathrm{i}\,z + 2$ donc l'angle de s est mesuré par $\arg(\frac{3}{2}\mathrm{i})$ donc s est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d. $s \circ s(O) = s(A) = B$ et $s \circ s(A) = s(B) = D$
s est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc s o s est une similitude d'angle π donc une homothétie de rapport négatif, donc Ω, O, B d'une part et Ω, A, D d'autre part sont alignés donc le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD).



4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$
telle que $\begin{cases} 2 + 3\,\mathrm{i} = a \times 0 + b \\ 2 = a \times 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 + 3\,\mathrm{i} \\ 2 = 2\,a + 2 + 3\,\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 + 3\,\mathrm{i} \\ a = -\frac{3}{2}\,\mathrm{i} \end{cases}$ donc $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 3\,\mathrm{i}$.

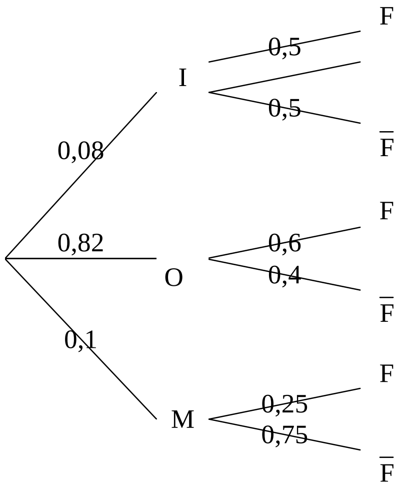
b. s' transforme B en B' d'affixe b' telle que $b' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,\bar{b} + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc $b' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,(2 - 3\,\mathrm{i}) + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc $b' = -3\,\mathrm{i} - \frac{9}{2} + 2 + 3\,\mathrm{i}$ soit $b' = -\frac{5}{2}$ donc $b' = e$ donc s'(B) = E.
s' transforme C en C' d'affixe c' telle que $c' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,\bar{c} + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc $c' = -\frac{3}{2}\mathrm{i} \times (-3\,\mathrm{i}) + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc $c' = -\frac{9}{2} + 2 + 3\,\mathrm{i}$
soit $c' = -\frac{5}{2} + 2\,\mathrm{i} = d$ donc s'(C) = D. La similitude s' transforme OABC en ABDE.

c. La réflexion d'axe (OA) a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$, soit h la transformation d'écriture complexe $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,z + 2 + 3\,\mathrm{i}$
$M \xrightarrow{s_{(OA)}} M_1(z_1 = \bar{z}) \xrightarrow{h} M'(z')$ avec $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,z_1 + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 3\,\mathrm{i}$ donc h o $s_{(OA)}$ = s'
h est une homothétie de rapport $-\frac{3}{2}$ et de centre le point tel que $z = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,z + 2 + 3\,\mathrm{i}$
$z = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\,z + 2 + 3\,\mathrm{i} \Leftrightarrow 2\,z = -3\,\mathrm{i}\,z + 2\,(2 + 3\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow z\,(2 + 3\,\mathrm{i}) = 2\,(2 + 3\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow z = 2$ donc h est l'homothétie de rapport $-\frac{3}{2}$ et de centre A.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

I. Partie A

1.



2. *a*. La probabilité d'interroger un agent de maintenance est :
$p = 1 - (p(\text{I}) + p(\text{O})) = 1 - 0{,}08 - 0{,}82$ donc $p = 0{,}1$.

2. *b*. La probabilité d'interroger une femme agent de maintenance est :
$p = p(\text{F} \cap \text{M}) = 0{,}1 \times 0{,}25$ donc $p = 0{,}025$

2. *b*. La probabilité d'interroger une femme est :
$p = p(\text{F} \cap \text{I}) + p(\text{F} \cap \text{O}) + p(\text{F} \cap \text{M})$
$p = 0{,}08 \times 0{,}5 + 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}25$ donc $p = 0{,}557$

II. Partie B

	A	$\overline{\text{A}}$	Total
B	37	3	40
$\overline{\text{B}}$	2	958	960
Total	39	961	1 0000

1. $p(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{37}{1\,000} = 0{,}037$

2. $p(\text{A}) = \dfrac{39}{1\,000} = 0{,}069$

3. $p(\text{B} / \text{A}) = \dfrac{37}{39} = 0{,}949$

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

I. Restitution organisée des connaissances

1. Soit $\text{X} = \ln x$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $x = \text{e}^{\text{X}}$ donc $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\text{X}}{\text{e}^{\text{X}}} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{e}^{\text{X}}}{\text{X}}}$ or $\lim\limits_{\text{X} \to +\infty} \dfrac{\text{e}^{\text{X}}}{\text{X}} \dfrac{\text{e}^{x}}{x} = +\infty$. donc $\lim\limits_{\text{X} \to +\infty} \dfrac{\text{X}}{\text{e}^{\text{X}}} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. $\dfrac{\ln x^n}{x^n} = n \dfrac{\ln x}{x^n}$ soit $\text{X} = x^n$ alors pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{X} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{\text{X} \to +\infty} \dfrac{\ln \text{X}}{\text{X}} = 0$

or $\dfrac{\ln x^n}{x^n} = \dfrac{\ln \text{X}}{\text{X}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^n}{x^n} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} n \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ donc pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction *f*

1. *a*. u est définie dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $u'(x) = 3\,x^2 + \dfrac{2}{x}$, $x > 0$ donc $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

***b*.** $u(1) = 2 \ln 1 = 0$ et u est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, donc si $0 < x < 1$, alors $u(x) < u(1)$ donc $u(x) < 0$
si $x = 1$, $u(1) = 0$ et si $x > 1$ alors $u(x) > u(1)$ donc $u(x) > 0$

2. Étude de la fonction *f*

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f'(x) = 1 - \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x^2 - 2\,x \ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{x - 2\,x \ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{x\,(1 - 2 \ln x)}{x^4} = 1 - \dfrac{(1 - 2 \ln x)}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \dfrac{u(x)}{x^3}$

$x > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

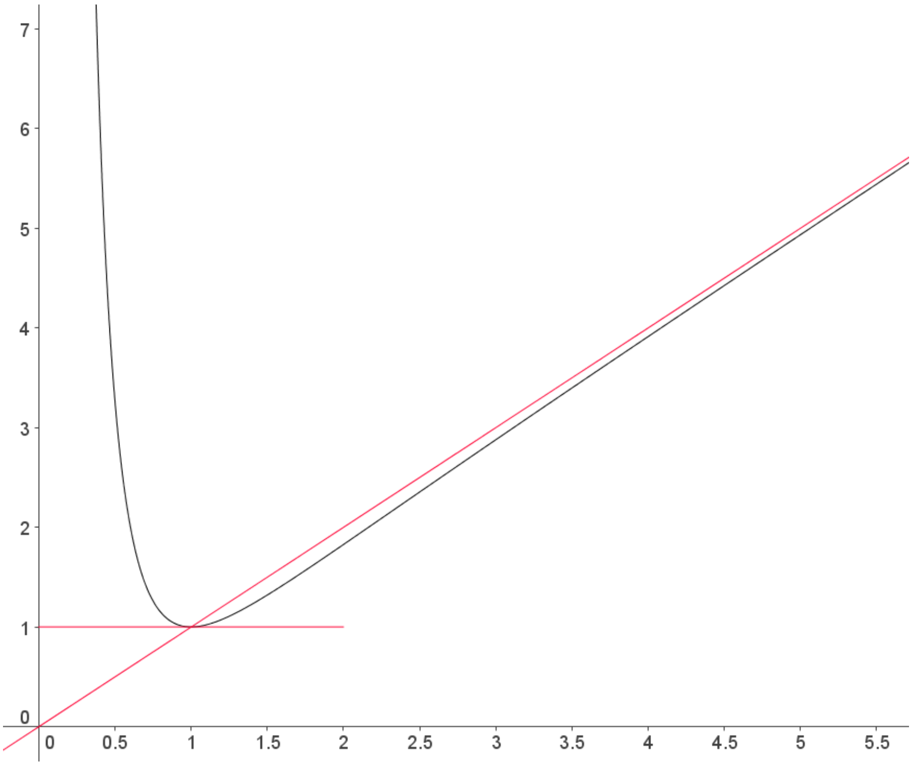
3. Éléments graphiques et tracés.

a. $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C.

b. Déterminer la position de C par rapport à (Δ).

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	
	‖	C est au dessus de (Δ)	Point d'intersection	C est en dessous de (Δ)	

c.



III Calculs d'aires

1. *a*. Sur $[1\,;+\infty[$, la droite (Δ) est au dessus de C donc $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} [x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Soit $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2} & \text{alors} \quad u(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = \ln x & \text{alors} \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $\mathscr{A}(\alpha) = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\alpha} - \displaystyle\int_1^{\alpha} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\mathscr{A}(\alpha) = -\dfrac{\ln\alpha}{\alpha} - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^{\alpha}$ donc $\mathscr{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$

b. $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha} = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 1$

2. $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln \mathrm{e} = -1$ donc $\mathscr{A}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} = 1$ donc $\ell = \mathscr{A}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.