Sommaire

Asie juin 2009

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2e^{-2x} + 3$

Réponse (2) : $f(x) = -2e^{2x} + 3$

Réponse (3) : $f(x) = -2e^{-2x} - 3$

2. Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) : {(A, 1), (C, 2)}

Réponse (2) : {(A, 1), (B, 2), (C, 2)}

Réponse (3) : {(A, 1), (B, 2), (C, 1)}

3. Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point A(2 ; 3 ; − 1).

Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :

Réponse (1) : $H_1(3 ; -1 ; 4)$

Réponse (2) : $H_2(4 ; -3 ; -4)$

Réponse (3) : $H_3(3 ; 0 ; 1)$

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ est égale à :}$$

Réponse (1) : $-\frac{\pi}{2}$

Réponse (2) : $\frac{\pi}{4}$

Réponse (3) : $\frac{\pi}{2}$.

Centres étrangers juin 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2\,\mathrm{i} \text{ et } b = -a.$$

Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

a. Déterminer l'affixe *c* du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe *d* du point D est $d = 2 - 6\,\mathrm{i}$.

c. Placer les points C et D sur le graphique Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système : $\{(\mathrm{A} ; 1) ; (\mathrm{B} ; -1) ; (\mathrm{C} ; \alpha)\}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CG}_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $\mathrm{G}_\alpha = \mathrm{D}$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = 4\sqrt{2}\,.$$

Métropole & La Réunion septembre 2008

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note I son centre et J le milieu de [A I].

1. C est le barycentre des points pondérés (A,m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$

c. $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB$ est :

a. la médiatrice de [AC].
b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI].
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0 \text{ est :}$$

a. la médiatrice de [AC].
b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI].
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Polynésie juin 2008

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$$a = 3 - 2\,i,\ b = 3 + 2\,i,\ c = 4\,i.$$

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}\,i$.

b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

Amérique du Sud Novembre 1998

Dans le plan P, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4 . On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.

2. On désigne par M un point quelconque de P.

a. Montrer que le vecteur $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ est un vecteur dont la norme est 8.

b. Déterminer et construire l'ensemble E, des points M du plan tels que :

$$\left\| 2\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = \left\| \vec{v} \right\|.$$

3. On considère le système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; *n*) ; (C ; *n*)} où *n* est un entier naturel fixé.

a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.

b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].

c. Calculer la distance AG_n en fonction de *n* et déterminer la limite de AG_n quand *n* tend vers + ∞.

Préciser la position de G_n, quand *n* tend vers + ∞.

d. Soit E_n, l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\| 2\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} + n\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} + n\,\overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = n\left\| \vec{v} \right\|.$$

Montrer que E_n, est un cercle qui passe par le point A. En préciser le centre et le rayon, noté R_n.

e. Construire E_2.

Amérique du Nord Juin 2004

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_m = \{(A, 1), (B, m), (C, 2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note :

$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse dorme 0,5 point chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel tonal négatif serait ramené à 0.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment [CI] .	
G_1 est barycentre de $\left\{(J , 2) , \left(C , \frac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}) il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

Pondichéry avril 1999

On considère un triangle ABC du plan.

1\. *a*. Déterminer et construire le point G, barycentre de {(A; 1) ; (B; – 1) ; (C ; 1)}.

b. Déterminer et construire le point G' , barycentre de {(A; 1) ; (B; 5) ; (C; – 2)} .

2\. *a*. Soit J le milieu de [AB]

Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montrer que le barycentre I de {(B ; 2) ; (C ; – 1} appartient à (G G') .

3\. Soit D un point quelconque du plan.

Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].

a. Déterminer trois réels *a*, *d* et *c* tels que K soit barycentre de {(A; *a*) ; (D ; *d*) ; (C ; *c*)} .

b. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).

Déterminer les réels *a*' et *c*' tels que X soit barycentre de {(A ; *a*') ; (C ; *c*')} .