Amérique du Sud Novembre 2010

Exercice 1 Commun à tous les candidats 5 points

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

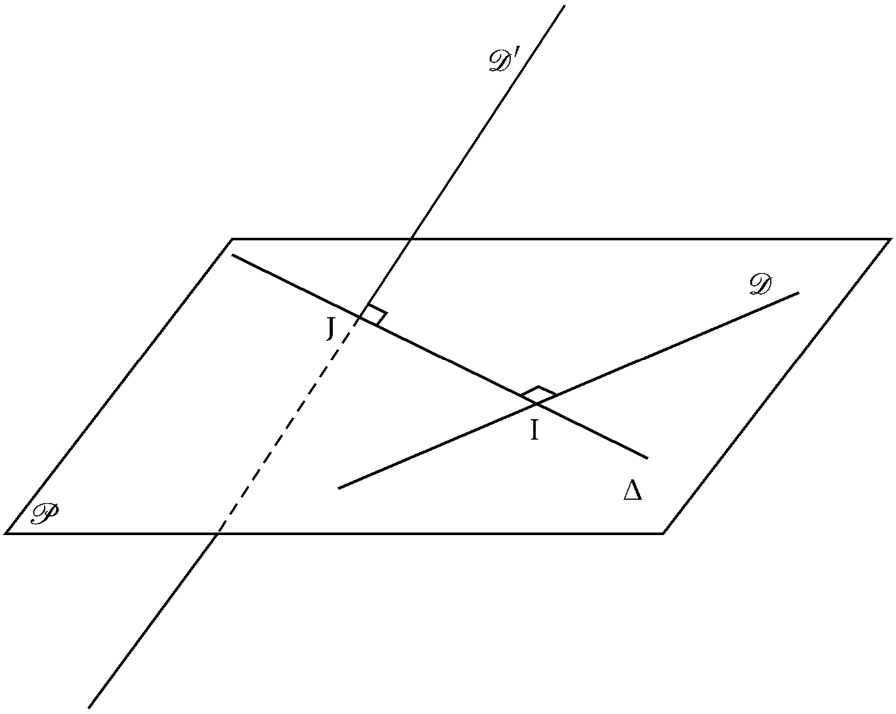
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

3. *a.* Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5 + 5\,\mathrm{i}$, $b = 5 - 5\,\mathrm{i}$ et $p = 10$.

On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.

On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

On note T le point d'affixe t , image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \mathrm{i}\,(10 - z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0$.

Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.

3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.

a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\bar{u}}{\bar{z}}$.

b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère MUDT ?

5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère MUDT dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que MUDT soit un carré.

Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats

a. Étudier la parité de l'entier A(11).
b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 \bmod d$.

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \bmod d$.
a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.
b. En déduire que s est un diviseur de 8.
c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de A(12).
Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'Internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \qquad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \qquad \text{et} \qquad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités P(F), P(A), P(C) et P(I).

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0{,}2 \quad ; \quad P_A(S) = 0{,}5 \quad ; \quad P_C(S) = 0{,}1 \quad ; \quad P_I(S) = 0{,}4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.
b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.
c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose : $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer d^2 puis $1000\,d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1000\,d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10%, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4 Commun à tous les candidats 5 points

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur [0 ; 1].

2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a : $\dfrac{1}{5} f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que : $\dfrac{1}{5} S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1{,}091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1{,}164$.

3. *a.* Démontrer que pour tout réel x de [0 ; 1], on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \mathrm{I}$

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

d. En déduire un encadrement de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

CORRECTION

Exercice 1 Commun à tous les candidats 5 points

1. Soit M le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, alors M $\in \mathscr{D}$ donc a pour coordonnées (x ; 0 ; 0)

M $\in \mathscr{D}'$, donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ donc on doit avoir $\begin{cases} x = -t \\ 0 = 3 + 3t \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$

ceci est impossible donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont pas de point d'intersection donc sont non coplanaires.

2. Un vecteur directeur de Δ est de la forme $\vec{w} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$, il est orthogonal à $\vec{i}$ vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc $\vec{w}\,.\,\vec{i} = 0$ soit $a = 0$ donc il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

Un vecteur directeur de Δ est de la forme $\vec{w} = b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$, il est orthogonal à $\vec{u}$ (– 1 ; 3 ; – 1) vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ donc $\vec{w}\,.\,\vec{u} = 0$ soit $3\,b - c = 0$ donc $c = 3\,b$. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{w} = \vec{j} + 3\,\vec{k}$

3. *a.* Tout point M de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées (x ; 0 ; 0), ses coordonnées vérifient $-3\,y + z = 0$ donc tout point M de la droite $\mathscr{D}$ appartient au plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3\,y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

b. J $\in \mathscr{D}'$, donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$, J appartient au plan $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient $-3\,y + z = 0$

donc $-3\,(3 + 3\,t) + 1 - t = 0$ soit $-8 - 10\,t = 0$ donc $t = -0{,}8$ donc J a pour coordonnées $\begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 3 - 3 \times 0{,}8 \\ z = 1 + 0{,}8 \end{cases}$

soit J a pour coordonnées (0,8 ; 0,6 ; 1,8).

c. La droite δ passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 0{,}6 + t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}, \\ z = 1{,}8 + 3\,t \end{cases}$

$\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{i}$ donc cette droite n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$ donc lui est sécante.
Si $t = -0{,}6$, le point de δ a pour coordonnées (0,8 ; 0 ; 0) donc appartient à $\mathscr{D}$
La droite δ passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I(0,8 ; 0 ; 0)
$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{u}$ donc δ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ en I et à $\mathscr{D}'$ en J donc δ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

d. La distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$ est égale à IJ, $\text{IJ}^2 = (0{,}8 - 0{,}8)^2 + 0{,}6^2 + 1{,}8^2 = 3{,}6$

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

1. La rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ a pour expression complexe $z' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,(z - a)$

soit $z' - a = -i\,(z - a)$ donc $z' = -i\,z + a\,(1 + i) = -i\,z + 5\,(1 + i)^2$ or $(1 + i)^2 = 2\,i$ donc $z' = i\,(10 - z)$

U image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ a pour affixe $u = i\,(10 - z)$

La rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ a pour expression complexe $z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}\,(z - b)$

soit $z' - b = i\,(z - b)$ donc $z' = i\,z + b\,(1 - i) = i\,z + 5\,(1 - i)^2$ or $(1 - i)^2 = -2\,i$ donc $z' = i\,(z - 10)$

l'affixe du point T est $t = i\,(z - 10)$
D est le symétrique du point M par rapport à O donc O est le milieu de [MD].
$t = i\,(z - 10) = -u$ donc U est le symétrique du point T par rapport à O donc O est le milieu de [TU], les diagonales [MD] et [TU] du quadrilatère MUDT ont même milieu O donc le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O.

2. Soit $z = x + i\,y$ avec x et y réels, $z\,\bar{z} - 5\,z - 5\,\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\,\bar{z} - 5\,(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10\,x = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 25$
donc Γ est le cercle de centre Ω (5 ; 0) de rayon 5.
Ω est le milieu de [OP] et ΩO = ΩP = 5 donc O et P appartiennent à Γ
$\Omega A^2 = (5 - 5)^2 + 5^2 = 25$ donc A $\in \Gamma$
$\Omega B^2 = (5 - 5)^2 + (-5)^2 = 25$ donc B $\in \Gamma$
Le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.

3. *a*. les points O, M et U sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OU} = k\,\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow u = k\,z \Leftrightarrow \dfrac{u}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.

***b*.** $u = \text{i}\,(10 - z)$ donc $\overline{u} = -\,\text{i}\,(10 - \overline{z})$

les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}} \Leftrightarrow u\,\overline{z} = \overline{u}\,z \Leftrightarrow \text{i}\,(10 - z)\,\overline{z} = -\,\text{i}\,(10 - \overline{z})\,z \Leftrightarrow (10 - z)\,\overline{z} = -\,(10 - \overline{z})\,z$

$\Leftrightarrow (10 - z)\,\overline{z} + (10 - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 10\,\overline{z} - z\,\overline{z} + 10\,z - \overline{z}\,z = 0 \Leftrightarrow 10\,\overline{z} + 10\,z - 2\,\overline{z}\,z = 0 \Leftrightarrow z\,\overline{z} - 5\,z - 5\,\overline{z} = 0 \Leftrightarrow$ M appartient à Γ.

4. Le triangle OMU est un triangle isocèle en O $\Leftrightarrow$ OM = OU $\Leftrightarrow |\,z\,| = |\,\text{i}\,(10 - z)\,| \Leftrightarrow |\,z\,| = |-\,\text{i}\,(z - 10)\,|$
$\Leftrightarrow |\,z\,| = |-\,\text{i}\,|\,|\,(z - 10)\,| \Leftrightarrow |\,z\,| = |\,z - 10\,| \Leftrightarrow$ OM = OP $\Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de [OP]
le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O qui *a* les diagonales de même longueurs (MD = 2 OM = 2 OU = UT) donc est un rectangle.

5. $\dfrac{u}{z}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \dfrac{u}{z} = -\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}} \Leftrightarrow u\,\overline{z} = -\,\overline{u}\,z \Leftrightarrow \text{i}\,(10 - z)\,\overline{z} = \text{i}\,(10 - \overline{z})\,z \Leftrightarrow (10 - z)\,\overline{z} = (10 - \overline{z})\,z$

$\Leftrightarrow (10 - z)\,\overline{z} - (10 - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 10\,\overline{z} - z\,\overline{z} - 10\,z + \overline{z}\,z = 0 \Leftrightarrow 10\,\overline{z} + 10\,z = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

M ≠ O et M ≠ P donc $\dfrac{u}{z}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M appartient à (O ; $\vec{v}$) privé de O et P

Si M est un point de la droite (OP) privée de O et P alors $\dfrac{u}{z}$ est un imaginaire pur donc l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU})$ est droit donc les diagonales du quadrilatère MUDT sont alors perpendiculaires entre elles.
Si M est un point de la droite (OP) privée de O et P, alors le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O qui *a* ses diagonales perpendiculaires entre elles donc est un losange.

MUDT est un carré $\Leftrightarrow$ MUDT est un rectangle et un losange $\Leftrightarrow$ M appartient la médiatrice de [OP] et M est un point de la droite (OP) privée de O et P $\Leftrightarrow$ M = Ω de coordonnées (5 ; 0)

Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points
1\. *a*. $\text{A}(11) = 11^4 + 1$ or $11 \equiv 1$ mod 2 donc $11^4 \equiv 1$ mod 2 donc $11^4 + 1 \equiv 0$ mod 2, donc A(11) est pair.

b. Soit n un entier naturel, alors soit $n \equiv 0$ mod 3, et $n^4 \equiv 0$ mod 3 donc $n^4 + 1 \equiv 1$ mod 3
soit $n \equiv 1$ mod 3, et $n^4 \equiv 1$ mod 3 donc $n^4 + 1 \equiv 2$ mod 3
soit $n \equiv 2$ mod 3 ou encore $n \equiv -1$ mod 3, donc $n^4 \equiv 1$ mod 3 donc $n^4 + 1 \equiv 2$ mod 3
dans tous les cas $n^4 + 1$ n'est pas congru à 0 modulo 3 donc quel que soit l'entier n, A(n) n'est pas un multiple de 3.

c. $\text{A}(n) - n^4 = 1$ ou encore $\text{A}(n) \times 1 + n \times (-\,n^3) = 1$
Soit d un diviseur de A(n) alors il existe un entier relatif q tel que $\text{A}(n) = d\,q$ donc $d\,q + n \times (-\,n^3) = 1$
donc il existe deux entiers relatifs u et v ($u = q$ et $v = -\,n^3$) tels que $d\,u + n\,v = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, d et n sont premiers entre eux

d. Soit d un diviseur de A(n) alors il existe un entier relatif q tel que $\text{A}(n) = d\,q$
donc $n^4 + 1 = d\,q$ donc $n^4 + 1 \equiv 0$ mod d ou $n^4 \equiv -1$ mod d donc, pour tout entier d diviseur de A(n) : $n^8 \equiv 1$ mod d.

2\. *a*. Dans la division euclidienne de k par s, il existe deux entiers relatifs q et r tels que $k = s\,q + r$ avec $0 \leq r < s$
alors $n^k = n^{q\,s + r} = n^{q\,s} \times n^r$ or $n^s \equiv 1$ mod d donc $n^{q\,s} \equiv 1$ mod d donc $n^k \equiv n^r$ mod d
k est un entier naturel tel que $n^k \equiv 1$ mod d donc $n^s \equiv 1$ mod d, or $0 \leq r < s$ donc si $r \neq 0$ alors s ne serait pas le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1$ mod d ce qui est impossible donc $r = 0$ donc s divise k.

b. Pour tout entier d diviseur de A(n) : $n^8 \equiv 1$ mod d.
8 est un entier tel que $n^8 \equiv 1$ mod d donc d'après la question précédente, s est un diviseur de 8.

c. si d est premier, alors d et n étant premiers entre eux (question 1. *c*.) $n^{d-1} \equiv 1$ mod d d'après le petit théorème de Fermat.
$d - 1$ est un entier tel que $n^{d-1} \equiv 1$ mod d donc d'après la question 2. *a*., s est un diviseur de $d - 1$.

3\. $\text{A}(n) = n^4 + 1$ si $s = 1$ alors $n \equiv 1$ mod d donc $n^4 \equiv 1$ mod d donc $\text{A}(n) \equiv 2$ mod d ce qui est exclu
si $s = 2$ alors $n^2 \equiv 1$ mod d donc $n^8 \equiv 1$ mod d donc $\text{A}(n) \equiv 2$ mod d ce qui est exclu
si $s = 4$ alors $n^4 \equiv 1$ mod d donc $\text{A}(n) \equiv 2$ mod d ce qui est exclu
s est un diviseur de 8 différent de 1 ; 2 ; 4 donc $s = 8$
p est un nombre premier, diviseur de A(n) donc 8 est un diviseur de $p - 1$ (question 2. *c*.) donc $p - 1 \equiv 0$ mod 8 soit p est congru à 1 modulo 8.

4. A(12) = 20 737 donc on cherche des nombres premiers compris entre 17 et $\sqrt{20\,737}$ soit entre 17 et 144

les diviseurs premiers de A(12) sont congrus à 1 modulo 8, donc appartiennent à {17 ; 41 ; 73 ; 89 ; 97 ; 113 ; 137}.

En effectuant les divisions de 20 737 par 17 ; 41 ; 73 ; 89 ; 97 ; 113 ; 137, on remarque que 20 737 = 89 × 233, et qu'aucun des autres nombres ne divise A(12).

233 est un nombre premier donc les diviseurs premiers de A(12) sont 89 et 233.

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

1. Soit p = P(A) alors P(F) = p et P(C) = 2 P(F) = 2 p et P(I) = P(C) = 2 p

P(A) + P(C) + P(F) + P(I) = 1 donc 6 p = 1 donc P(A) = P(F) = $\frac{1}{6}$ et P(C) = P(I) = $\frac{1}{3}$

2. *a.* $P(S \cap A) = P(A) \times P_A(S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

b. $p(S) = P(S \cap A) + P(S \cap C) + P(S \cap F) + P(S \cap I) = \frac{1}{12} + P_C(S) \times P(C) + P_F(S) \times P(F) + P_I(S) \times P(I)$

$p(S) = \frac{1}{6} \times 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}1 + \frac{1}{6} \times 0{,}2 + \frac{1}{3} \times 0{,}4 = \frac{17}{60}$.

c. $p_S(C) = \frac{P(C \cap S)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10}$

3. ***a.***

	Sites européens	Site canadien	Site indien	Total
Effectif d'acheteurs	335	310	355	1000
fréquences	0,335	0,31	0,355	1
$\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$	$2{,}77778\ 10^{-6}$	0,000544444	0,000469444	d^2 = 0,001016667
1000 d^2				1,016666667

donc 1000 d^2 = 1,01666 6667

b. 1000 d^2 est compris entre le premier et le neuvième décile donc au risque 10%, on peut considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable.

Exercice 4 Commun à tous les candidats 5 points

1. f est définie dérivable sur [0 ; 1] (quotient de fonctions dérivables sur [0 ; 1] et $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}$

$x \in [0\,;\,1]$ donc $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur [0 ; 1].

2. *a.* f est croissante sur [0 ; 1] ; pour tout entier k compris entre 0 et 4, $\left[\dfrac{k}{5}\,;\dfrac{k+1}{5}\right]$ est inclus dans [0 ; 1] ; donc pour tout x de $\left[\dfrac{k}{5}\,;\dfrac{k+1}{5}\right]$, $f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{k}{5}\,;\dfrac{k+1}{5}\right]$ donc $\displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\, dx \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right) dx$

soit $f\left(\dfrac{k}{5}\right) \displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} 1\, dx \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\, dx \leq f\left(\frac{k+1}{5}\right) \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} 1\, dx$

$\displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} 1\, dx = \frac{k+1}{5} - \frac{k}{5} = \frac{1}{5}$ donc pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a : $\dfrac{1}{5} f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\, dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

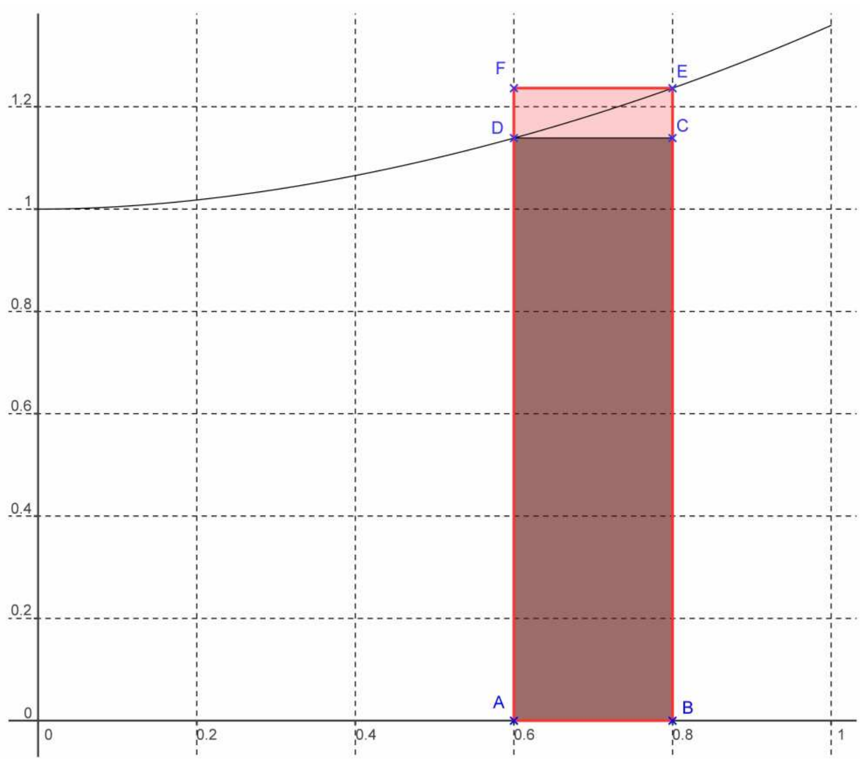
La fonction f est continue, positive sur [0 ; 1], pour tout entier k compris entre 0 et 4, $\left[\dfrac{k}{5}\,;\dfrac{k+1}{5}\right]$ est inclus dans [0 ; 1] donc $\displaystyle\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\, dx$ est l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \dfrac{k}{5}$ est $x = \dfrac{k+1}{5}$.

Soit les points A, B, C, D, E, F de coordonnées respectives :

A$\left(\dfrac{k}{5}\,;0\right)$, B $\left(\dfrac{k+1}{5}\,;0\right)$; C$\left(\dfrac{k+1}{5}\,;\,f\left(\dfrac{k}{5}\right)\right)$; D$\left(\dfrac{k}{5}\,;\,f\left(\dfrac{k}{5}\right)\right)$; E$\left(\dfrac{k+1}{5}\,;\,f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)\right)$; F$\left(\dfrac{k}{5}\,;\,f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)\right)$.

$\dfrac{1}{5} f\left(\dfrac{k}{5}\right)$ est l'aire du rectangle ABCD inscrit à l'intérieur de ce domaine

$\dfrac{1}{5} f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$ est l'aire du rectangle ABEF contenant ce domaine.



b. En écrivant $\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \le \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ successivement pour k entier variant de 0 à 5

$$\frac{1}{5} f(0) \le \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) \le \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) \le \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) \le \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) \le \int_{\frac{4}{5}}^{1} \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f(1)$$

En additionnant terme à terme :

$$\frac{1}{5} f(0) + \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) \le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} f(1)$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5} f(0) + \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right).$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{5} f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5} f(0) + \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} f(1) \text{ donc :}$$

$\frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} f(1) = S_5 - \frac{1}{5} f(0) = \frac{1}{5}(S_5 - 1)$ donc $\frac{1}{5} S_4 \le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

c. $S_4 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}8178$ donc $\frac{1}{5} S_4 \approx 1{,}0917$ et $\frac{1}{5}(S_5 - 1) \approx 1{,}1636$

donc $1{,}091 \le \frac{1}{5} S_4 \le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx \le \frac{1}{5}(S_5 - 1) \le 1{,}164$ soit $1{,}091 \le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx \le 1{,}164$

3. *a.* pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) + x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$ soit : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

b. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$ donc $\frac{e^x}{1+x} = (1-x)e^x + \frac{x^2 e^x}{1+x}$ donc $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx = \int_0^1 (1-x)e^x \, dx + \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} \, dx$

c. Soit $u'(x) = e^x$ alors $u(x) = e^x$

$v(x) = 1 - x$ alors $v'(x) = -1$ donc $\int_0^1 (1-x)e^x \, dx = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -e^x \, dx$

$\int_0^1 (1-x)e^x \, dx = -1 + \left[e^x\right]_0^1$ soit $\int_0^1 (1-x)e^x \, dx = e - 2$

d. En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} \, dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

$\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx = \int_0^1 (1-x)e^x \, dx + I = e - 2 + I$ donc $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx - e + 2$

$0{,}718 \le e - 2 \le 0{,}719$ donc $-0{,}719 \le 2 - e \le -0{,}718$ soit $1{,}091 - 0{,}719 \le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} \, dx - e + 2 \le 1{,}164 - 0{,}718$

$0{,}372 \le I \le 0{,}446$

$0{,}37 \le I \le 0{,}45$ l'amplitude de l'intervalle est $0{,}45 - 0{,}37 = 0{,}08$ donc est strictement inférieure à 10^{-1}.