Polynésie septembre 2007

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ. Soit :

• les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ;
• les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
• le point M milieu du segment [AA′] ;
• le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe − 6 + 4 i, le point B a pour affixe 2 + 4 i, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4 i.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A′, B′ et H′.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1\. *a*. Montrer que H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).

b. Montrer que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

c. En déduire que $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$ et que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2\. On appelle *s* la similitude directe qui transforme M en O et I en H. On note K l'image du point J par la similitude *s*.

a. Montrer que OK= OH′, puis que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point H′ est l'image du point J par la similitude *s*.

3\. Montrer que $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

CORRECTION

Partie A. Étude d'un exemple

1\. σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc a une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$

O est le centre de σ donc $b = 0$, $|a| = \frac{1}{2}$ et $\arg a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}i$

σ a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}i z$

σ(A) = A' est le point d'affixe $\frac{1}{2}i(-6 + 4i) = -2 - 3i$

σ(B) = B' est le point d'affixe $\frac{1}{2}i(2 + 4i) = -2 + i$

σ(H) = H' est le point d'affixe $\frac{1}{2}i \times (4i) = -2$

2\. I est le milieu du segment [A′ B] donc a pour affixe $z_I = \frac{z_{A'} + z_B}{2} = \frac{1}{2}i$

J est le milieu du segment [A B′] donc a pour affixe $z_J = \frac{z_A + z_{B'}}{2} = -4 + \frac{5}{2}i$

donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour affixe $z_J - z_I = -4 + 2i$

$\overrightarrow{HH'}$ a pour affixe $z_{H'} - z_H = -2 - 4i$

$\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{IJ} = (-4) \times (-2) + 2 \times (-4) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

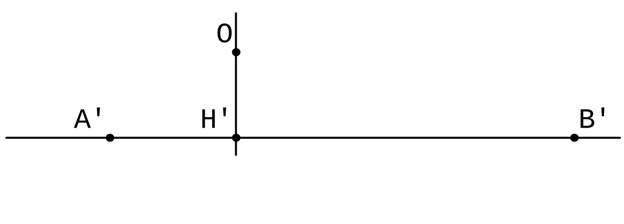
Partie B. Étude du cas général

1\. *a*. H est le point de (AB) tel que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires

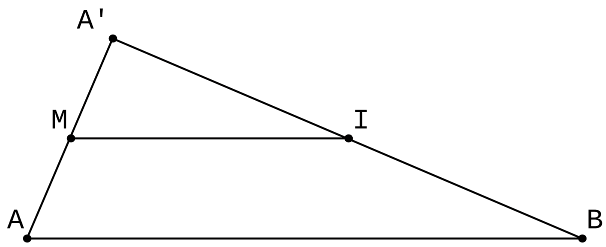
Une similitude conserve l'alignement donc transforme (AB) en (A'B') et (OH) en (OH') (O est le centre de σ donc O' = O) et H' est le point d'intersection des droites (OH') et (A'B')

Une similitude conserve les angles orientés donc en particulier les angles droits donc les droites (OH') et (A'B') sont perpendiculaires

donc H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).



b. Dans le triangle ABA’, le point M est le milieu du segment [AA′] et le point I est le milieu du segment [A′ B] donc $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



c. σ est une similitude directe de centre O, de rapport λ et d’angle θ.

σ : H → H’ et O → O donc $\frac{OH'}{OH} = \lambda$ et $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ donc $\frac{MJ}{MI} = \frac{A'B'}{AB}$ or σ : A → A’ et B → B’ donc $\frac{A'B'}{AB} = \lambda$ donc $\frac{MJ}{MI} = \lambda$

donc $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$

de plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ or $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 . *a*. s : M → O
I → H
J → K

donc $\frac{OK}{OH} = \frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$ donc $\frac{OK}{OH} = \frac{OH'}{OH}$ soit OK = OH’ de plus $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. donc $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + (\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OK}) = 0 + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OH'}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de même sens or OK = OH’ donc $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OK}$ soit K = H’. Le point H′ est l’image du point J par la similitude *s*.

3. s : M → O
I → H
J → H’

donc HH’ = λ IJ et $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

de même OH = λ MI et $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc les droites (MI) et (AB) sont parallèles or H est la projection orthogonale de O sur (AB) donc les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires donc les droites (OH) et (MI) sont perpendiculaires.

L’angle $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc comme $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. alors $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'})$a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).