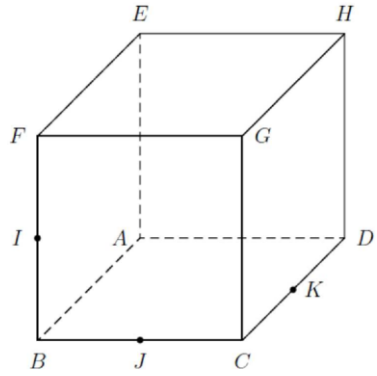
Pondichéry avril 2016

ABCDEFGJI désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification.
On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G, L, J et K dans ce repère.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

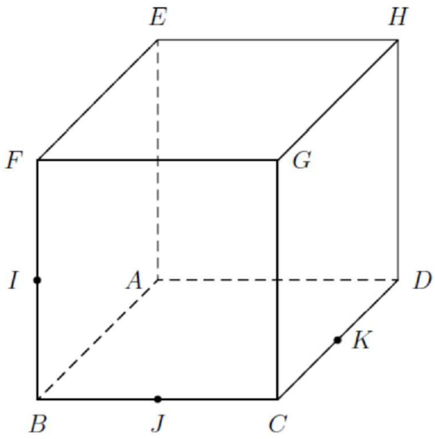
a. Démontrer que $\text{MI}^2 = 3\,t^2 - 3\,t + \frac{5}{4}$

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $\text{N}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $\text{N}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

a. N appartient au plan (IJK).

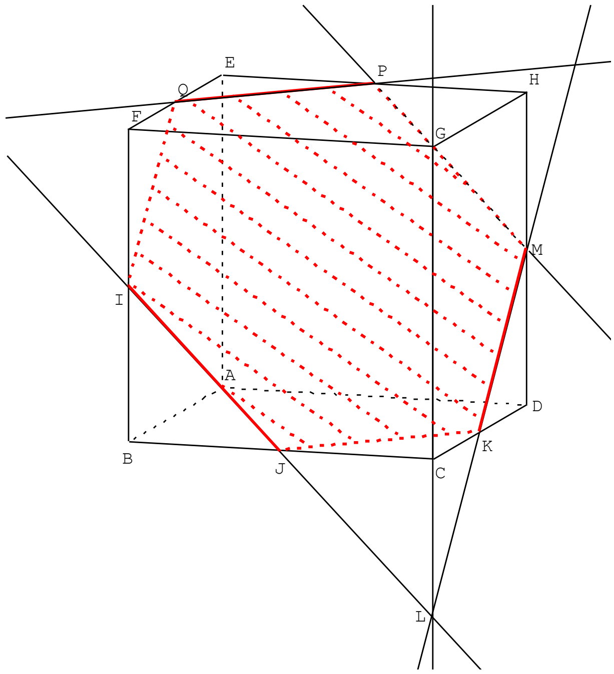
b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).



CORRECTION

Partie A

Le point L appartient à (IJ) donc au plan (IJK) donc ((LK) est l'intersection des plans (IJK) et (CDH) ;
Cette droite coupe ((DH) en M
Les plans (DEH) et (CFG) sont parallèles donc les intersections des plans (DEH) et (CFG) par le plan (IJK) sont deux droites parallèles. Il suffit donc de tracer la parallèle en M à (IJ) pour obtenir la droite intersection des plans (DEH) et (IJK).
Cette droite coupe ([EH] en P
Les plans (ABC) et (FGH) sont parallèles donc les intersections des plans (ABC) et (FGH) par le plan (IJK) sont deux droites parallèles. Il suffit donc de tracer la parallèle en P à (JK) pour obtenir la droite intersection des plans (FGH) et (IJK).
Cette droite coupe [BF] en Q d'où la construction de la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

1. A (0 ; 0 ; 0), G(1 ; 1 ; 1),
L$\left(1 ; 1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$, J$\left(1 ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$ et K$\left(\dfrac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$.

2. I$\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \dfrac{1}{2} - 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{IK}\left(-\dfrac{1}{2} ; 1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IK} = -1 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times 1 - 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux.

Les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. Une équation cartésienne du plan (IJK) est de la forme $x + y + z = d$

Ce plan contient le point J donc $d = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est $x + y + z = \dfrac{3}{2}$.

3. *a*. M a pour coordonnées (t ; t ; t) donc $\text{MI}^2 = (t-1)^2 + t^2 + \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 3t^2 - 2t + 1 - t + \dfrac{1}{4}$ soit $\text{MI}^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$

b. $f(t) = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$ donc $f'(t) = 6t - 3$ donc $f'(t) > 0$ si $t > \dfrac{1}{2}$ et $f'(t) < 0$ si $t < \dfrac{1}{2}$ donc f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ et décroissante sur $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$ donc admet un minimum pour $t = \dfrac{1}{2}$ donc la distance MI est minimale pour le point N$\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

4. *a*. $x + y + z = 3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ donc N appartient au plan (IJK).

b. N appartient au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) donc les droites (IN) et (AG) sont orthogonales.

N est le point de la droite (AG) obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$ donc les droites (IN) et (AG) sont sécantes donc la droite (IN) est perpendiculaire à la droite (AG)

$\overrightarrow{IN}\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2} ; 0\right)$ et $\overrightarrow{BF}(0 ; 0 ; 1)$ donc $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ donc les droites (IN) et (BF) sont orthogonales.

I est le milieu de [BF] donc les droites (IN) et (BF) sont sécantes donc la droite (IN) est perpendiculaire à la droite (BF).