Centres étrangers juin 2018

Exercice I 4 points Pour tous les candidats

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 20] par :

$$f(t) = (0{,}8\,t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.

a. Calculer $f(20)$.

b. Déterminer le taux maximal de CO2 présent dans le local pendant l'expérience.

2. On souhaite que le taux de CO2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8 t + 0,2) e^(− 0,5 t) + 0,03
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?

Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 11] par : $F(t) = (-1{,}6\,t - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}03\,t$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 11].

b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 11].

Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

CORRECTION

1. ***a.*** $f(20) = 16{,}2\,\mathrm{e}^{-10} + 0{,}03$ donc $f(20) \approx 0{,}031$

b. D'après le tableau de variation, f admet un maximum obtenu pour $t = 1{,}75$, il est alors égal à $f(1{,}75)$ et $f(1{,}75) = 0{,}697$ donc, le taux maximal de CO2 présent dans le local pendant l'expérience est de 69,7 %.

2. ***a.*** La fonction f est croissante sur [0 ; 1,75] donc pour tout t de [0 ; 1,75], $f(t) \geq f(0)$ soit $f(t) \geq 0{,}23$

Sur [0 ; 1,75] l'équation $f(t) = 0{,}035$ n'a pas de solution.

Sur [1,75 ; 20], la fonction f est définie, continue, strictement décroissante, $f([1{,}75 ; 20]) = [f(20) ; f(1{,}75)]$

$f(20) < 0{,}035$ et $f(1{,}75) > 0{,}035$ donc l'équation $f(t) = 0{,}035$ admet une seule solution T sur [1,75 ; 20] donc sur [0 ; 20].

b. L'algorithme calcule les différentes valeurs de $f(t)$ en partant de $t = 1{,}75$, avec un pas de 0,1.

Il s'arrête lorsque $f(t) > 0{,}035$ donc la valeur de V est inférieure à 0,035. La valeur de t obtenue est une valeur approchée par excès de T.

$f(15{,}65) > 0{,}035$ et $f(15{,}75) < 0{,}035$ donc l'algorithme s'arrête lorsque $t = 15{,}75$. Il faut attendre 15 minutes 45 secondes pour que le taux de CO2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 11] par : $F(t) = (-1{,}6\,t - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}03\,t$.

$$\begin{cases} u(t) = -1{,}6\,t - 3{,}6 & u'(t) = -1{,}6 \\ v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5\,t} & v'(t) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} \end{cases}$$ donc $F'(t) = -1{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} - 0{,}5\,(-1{,}6\,t - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}03$

$F'(t) = (-1{,}6 + 0{,}8\,t + 1{,}8)\,\mathrm{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}03$ donc $F'(t) = f(t)$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 11].

b. $V_m = \dfrac{1}{11}\displaystyle\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{11}\,[F(11) - F(0)]$ soit $V_m = \dfrac{1}{11}\,[-21{,}2\,\mathrm{e}^{-5{,}5} + 0{,}33 + 3{,}6]$

$V_m = \dfrac{1}{11}\,[-21{,}2\,\mathrm{e}^{-5{,}5} + 3{,}93]$ soit $V_m \approx 0{,}349$ donc $V_m \approx 34{,}9$ %