Exercice1

1) $v_2 = \frac{1}{4} \times v_1 + 120 = 150$ litres au bout de 2 semaines

$v_3 = \frac{1}{4} \times v_2 + 120 = 157{,}5$ litres au bout de 3 semaines

2) *chaque semaine il reste* $\frac{1}{4}$ de la semaine précédente (car il perd les $\frac{3}{4}$) auxquels on rajoute 120 nouveaux litres . donc $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n + 120$

3) $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ la suite est donc non arithmétique

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2} \quad \textit{la suite est donc non géométrique}$$

$$4)\ u_{n+1} = 160 - v_{n+1} = 160 - \left(\frac{1}{4} v_n + 120\right) = -\frac{1}{4} v_n + 40 = \frac{1}{4}(-v_n + 160) = \frac{1}{4} u_n$$

Donc la suite (u_n) *est* géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = 160 - v_1 = 40$

5) donc d'après le cours $u_n = u_1\, q^{n-1}$

Soit ici $u_n = 40 \times (\frac{1}{4})^{n-1}$

Donc $v_n = 160 - 40 \times (\frac{1}{4})^{n-1}$

6) Au bout de 10 semaines on a déposé 10 ×120 litres mais il restera $v_{10} \approx 160$ *litres*

Donc 1040 litres auront été utilisés ou se seront décomposés .

Exercice2

1. $u_1 = 1500 - 1500 \times \dfrac{20}{100} + 50 = 1500 \times 0.8 + 50 = 1250$. $\boxed{u_1 = 1250}$.
2. Une diminution de 20% de la surface engazonnée se traduit par une multiplication par $1 - \dfrac{20}{100} = 0.8$.
   Pour obtenir la surface engazonnée u_{n+1} de l'année $n+1$, on multiplie donc la surface engazonnée u_n de l'année n par 0.8 auquel on rajoute les 50 m^2 de nouveau gazon. Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0.8u_n + 50}$.
3. (a) On sait que $v_n = u_n - 250$ donc $u_n = v_n + 250$. Pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0.8u_n + 50 - 250 = 0.8\,(v_n + 250) - 200 = 0.8v_n + 0.8 \times 250 - 200 = 0.8v_n$.
   $\boxed{(v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } q = 0.8 \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 - 250 = 1500 - 250 = 1250}$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 1250 \times 0.8^n}$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = v_n + 250 = 1250 \times 0.8^n + 250}$.

   (d) $u_4 = 1250 \times 0.8^4 + 250 = 762$. $\boxed{\text{Au bout de quatre années, la surface engazonnée est de 762 m}^2}$.
4. Tant que $\boxed{u > 500}$ faire
   u prend la valeur $\boxed{0.8 \times u + 50}$
   n prend la valeur $\boxed{n + 1}$

Exercice3

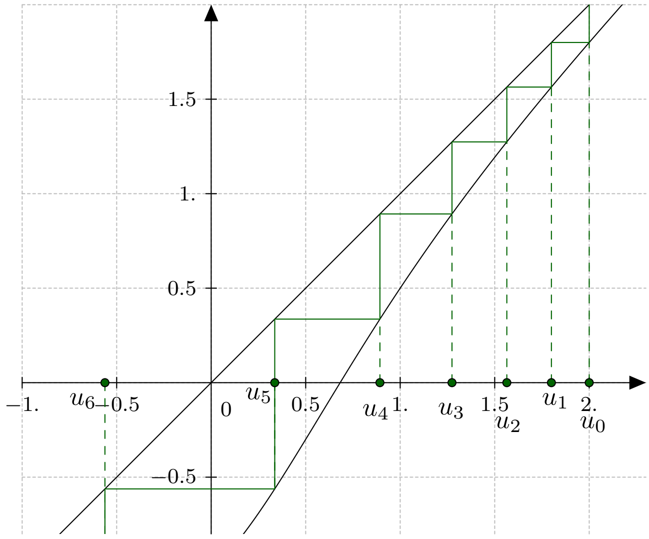
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1}$.

1. Calculer, en précisant vos calculs, u_1 et u_2 (on donnera des valeur exactes).

$$u_1 = u_0 - \frac{1}{(u_0)^2+1} = 2 - \frac{1}{4+1} = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$u_1 = u_1 - \frac{1}{(u_1)^2+1} = \frac{9}{5} - \frac{1}{\frac{81}{25}+1} = \frac{9}{5} - \frac{25}{106} = \frac{829}{530}$$

2.



3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) (On démontrera sa réponse).

Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1} - u_n = -\dfrac{1}{(u_n)^2+1} < 0$ (car $(u_n)^2 + 1 > 0$).

$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

4. Écrire un algorithme qui calcule et affiche la valeur de u_n pour un entier n supérieur ou égal à 1 donné en entrée.

```
DÉBUT
Entrer N
U prend la valeur 2
Pour K allant de 1 à N
U prend la valeur U − 1/(U^2 + 1)
Fin Pour
Afficher U
FIN
```

5. Donner une valeur approchée de u_{50} arrondie à 10^{-2}. $u_{50} = -4,98$

6. Compléter l'algorithme suivant qui qui détermine et affiche le plus petit entier p tel que $u_p < -6$.

```
variable   U est un réel. n est un entier
entrée     n prend la valeur 0
             U prend la valeur 2
traitement
    Tant que U ⩾ −6 faire
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur U − 1/(U^2 + 1)
    Fin Tant que
sortie   afficher N
```

7. Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de p.

le plus petit entier p tel que $u_p < -6$ est $p = 82$.

8. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$? Justifier.

Comme $u_{82} < -6$ et (u_n) est décroissante, pour tout $n \geqslant 82$, $u_n \leqslant u_{82} < -6$.

$\boxed{\text{Oui, on peut affirmer que } u_n \text{ est strictement inférieur à } -6 \text{ pour tout entier } n \text{ à partir de } 82.}$