Antilles-Guyane septembre 2014

Exercice 1 6 points Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur.

D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

A l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées parles tests;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise.

On note :

N l'événement « la peluche répond aux normes en vigueur »;

A l'événement « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.

2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.

3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leq 4) = 0{,}5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice. Calculer la valeur exacte de λ.

2. On prendra ici $\lambda = 0{,}1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donnera sa sœur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. A la suite d'une étude, il apparaît que pour tin enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

2. On sait que $P(J \leq 385) = 0{,}975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

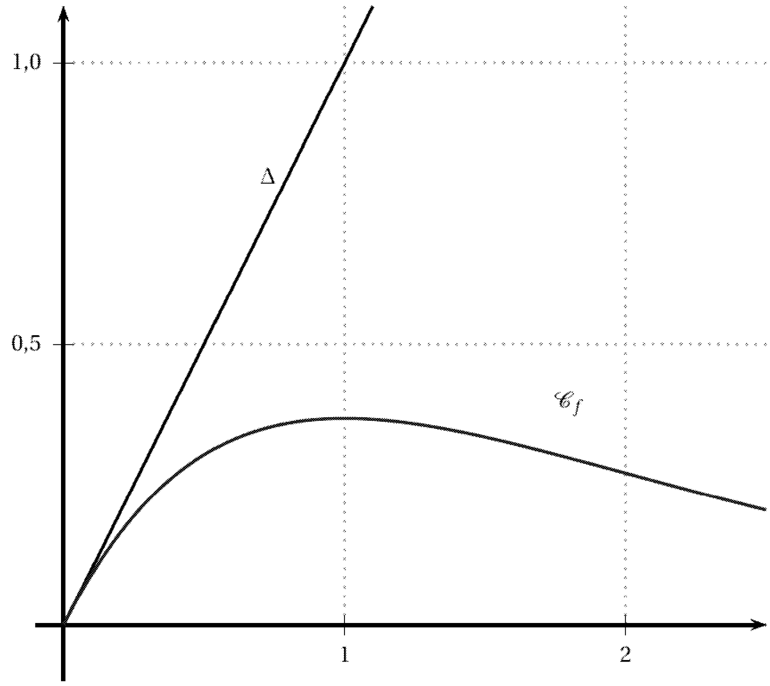
On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer la dérivée f de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

On donne ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.



Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en annexe, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. *a.* Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n .$$

Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il calcule S_{100}.

Déclaration des variables
S et u sont des nombres réels
k est un nombre entier
Initialisation
u prend la valeur................
S prend la valeur...............
Traitement
Pour k variant de 1 à ....
u prend la valeur $u \times e^{-u}$
S prend la valeur ....
Fin Pour
Afficher.............................

Exercice 3 3 points Commun à tous les candidats
On considère l'équation (E_1) $\quad e^x - x^n = 0$
où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Exercice 4 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
On note C l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni don repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.
1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans C l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - 8| = 3$.
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
$$x^2 - y^2 + x + 9 + i(2xy + 2y).$$
b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 4 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X, est transférée à l'agence Y et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.
Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année 2014 + n, exprimées en millions d'euros.
On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante
$U_{n+1} = A\,U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.
2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
3. On note : $D = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.
a. Donner sans détailler le calcul, la matrice $P\,D\,Q$.

b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel $Q\,P$. Dans la suite, on admettra que $Q\,P = \mathrm{I}$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P\,D^n\,Q$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n,. $V_{n+1} = A\,V_n$.

b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n, en fonction de A, n et V_0.

5. Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25\times 0,3^n + 0,75\times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75\times 0,3^n + 0,25\times 0,7^n \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V, en détaillant les calculs.

b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

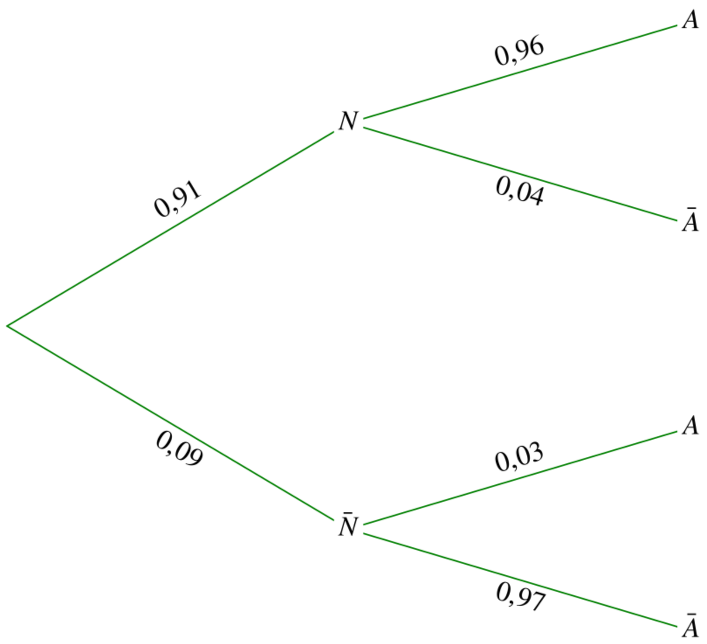
c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

CORRECTION

Exercice 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. $P(A) = P(A\cap N) + P(A\cap \overline{N})$ donc $P(A) = 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 = 0,8763$.

3. $P_A(N) = \dfrac{P(A\cap N)}{P(A)} = \dfrac{0,91\times 0,96}{0,8763}$ soit environ 0,9969

Partie B

1. Un peluche a 50 % de chance de subir un dommage majeur dans les quatre premières années.

$P(D \leq 4) = 0,5$ donc $1 - e^{-4\lambda} = 0,5$ soit $e^{-4\lambda} = 0,5$ donc $-4\lambda = \ln 0,5$

$\lambda = -\dfrac{\ln 0,5}{4}$ soit environ 0,1733

2. $P_{(D\geq 3)}(X \geq 3+5) = P(X\geq 5) = e^{-5\lambda}$ soit environ 0,4204

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{(D\geq t)}(D \geq s + t) = P(D \geq s)$.

Partie C

1. X suit une loi normale centrée réduite (moyenne 0, écart-type 1).

2. $P(J \leq 385) = P\left(X \leq \dfrac{385-358}{\sigma}\right) = 0,975$ donc $\dfrac{27}{\sigma} = 1,95996$ soit $\sigma = \dfrac{27}{1,95996}$ soit $\sigma = 14$ valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. Déterminer la dérivée f de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

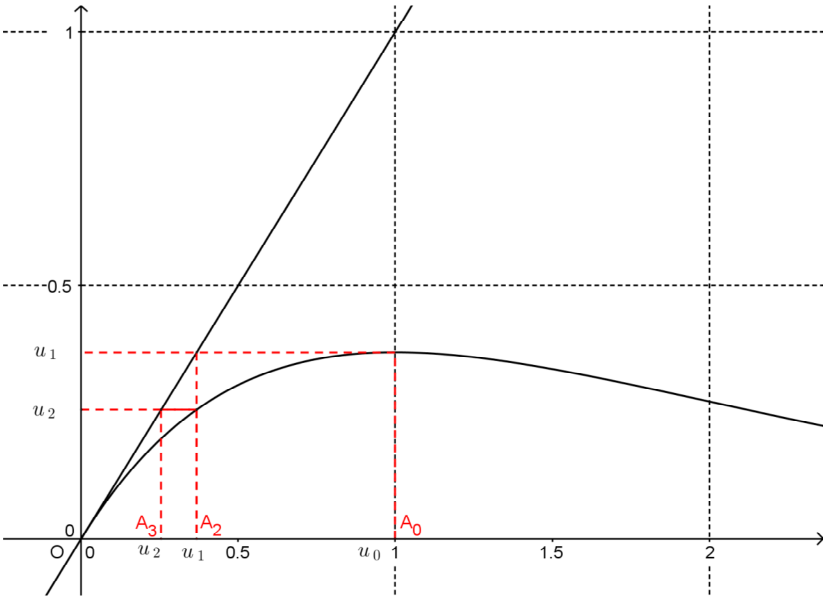
$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

1.



2. Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

Hérédité : montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$

$u_{n+1} = f(u_n) = u_n\,e^{-u_n}$. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

3. $u_{n+1} - u_n = u_n\,e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$ or $u_n > 0$ donc $-u_n < 0$ donc $e^{-u_n} < 1$ donc $u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

4. *a.* La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

b $x\,e^{-x} = x \Leftrightarrow x\,e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x\,(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Partie C

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $S_0 = u_0$

```
Déclaration des variables
        S et u sont des nombres réels
        k est un nombre entier
Initialisation
      u prend la valeur 1
      S prend la valeur 1
Traitement
      Pour k variant de 1 à 100
            u prend la valeur u × e^(–u)
            S prend la valeur S + u
      Fin Pour
      Afficher S
```

Exercice 3 3 points Commun à tous les candidats

1. x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln x^n \Leftrightarrow x = n \ln x \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{x}{n} \Leftrightarrow \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$

2. Les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes donc soit $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-x}{nx}$

x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul donc $g'(x)$ a le même signe que $n - x$.

x	0		n		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	$-\infty$ ↗	$\ln n - 1$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$g(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n}$ or $\dfrac{-1}{n} < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

D'après le tableau de variation, g admet un maximum en n, égal à $\ln n - 1$.

L'équation $g(x) = 0$ admettra deux solutions distinctes sur $[\,0\,;+\infty\,[$ si et seulement si $\ln n - 1 > 0$

$\ln n - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln n > 1 \Leftrightarrow n < e^1 \Leftrightarrow n > e$.

L'équation (E_1) admet deux solutions distinctes si et seulement si $n \geq 3$.

Exercice 4 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $(-1 + i\sqrt{3})^2 = 1 - 3 - 2i\sqrt{3} = -2 - 2i\sqrt{3}$

$f(1 + i\sqrt{3}) = -2 - 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2. $z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$

Cette équation est à coefficient réels et admet une première solution $-1 + i\sqrt{3}$ elle admet donc une seconde solution conjuguée de la première $-1 - i\sqrt{3}$.

$|-1 + i\sqrt{3}|^2 = 1 + 3 = 4$ donc $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$

$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$-1 - i\sqrt{3}$ est le conjugué de $-1 + i\sqrt{3}$ donc admet pour forme exponentielle $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$|-1 + i\sqrt{3}| = 2$ donc A et B appartiennent au cercle (C) de centre O de rayon 2.

La partie réelle de $-1 + i\sqrt{3}$ est égale à -1 donc A est le point d'intersection du cercle (C) et de la droite d'équation $x = -1$ d'ordonnée positive, B est le symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

3. $f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(9 - \lambda) = 4(\lambda - 8)$

L'équation $z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\Delta < 0$ soit $\lambda < 8$.

4. $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ donc $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3}$

$|z+1| = |z-(-1)| = \Omega M$ donc $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}$

(F) est le cercle de centre Ω $(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5. *a*. $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x + iy)^2 + x + iy + 9$

$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 9$

$f(z) = x^2 - y^2 + x + 9 + i(2xy + 2y)$.

***b*.** $f(z)$ est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle soit si et seulement si $2xy + 2y = 0$ soit $2y(x+1) = 0$

On a donc soit $y = 0$ soit $x + 1 = 0$

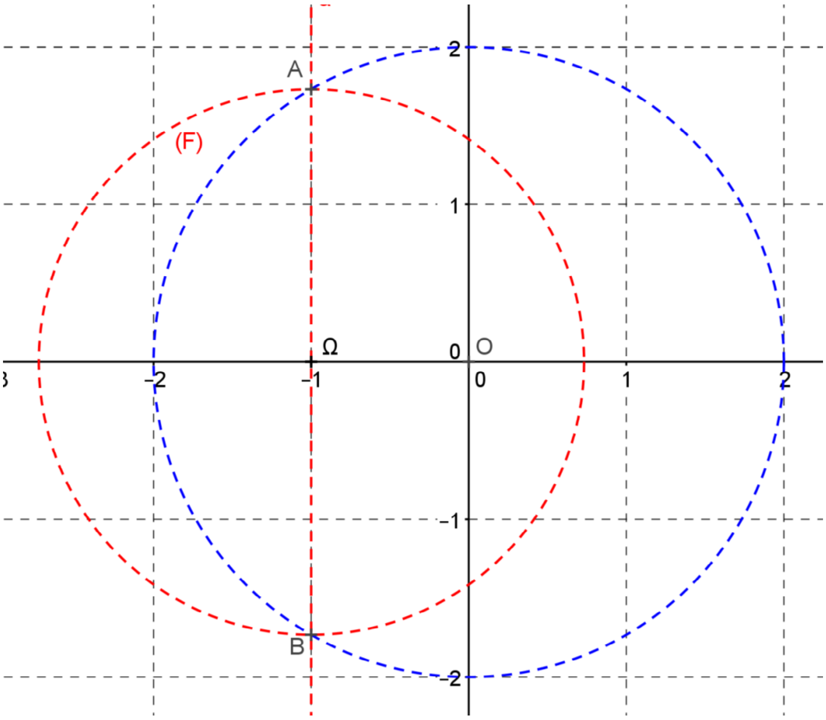
(E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = 0$ et $x = -1$.

6. Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$, donc les points d'intersection du cercle (F) avec la droite D_1 (axe des abscisses) ont pour coordonnées $(-1 + \sqrt{3}\ ; 0)$ et $(-1 - \sqrt{3}\ ; 0)$.

Les points d'intersection de (F) et de D_2 ont pour abscisse -1 donc une affixe de la forme $-1 + iy$

Ils appartiennent au cercle de centre Ω de rayon $\sqrt{3}$ donc leurs affixes vérifient $| z + 1 | = \sqrt{3}$ soit $| i y | = \sqrt{3}$ donc $| y | = \sqrt{3}$ soit $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$

Les points d'intersection de (F) et de D_2 ont pour coordonnées $(-1 ; \sqrt{3})$ et $(-1 ; -\sqrt{3})$.



Exercice 4 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le coefficient 0,6 de la matrice A, est la probabilité que, sachant que la somme est déposée à l'agence X une certaine année, elle le restera l'année suivante.

Le coefficient 3 de la matrice B, correspond au fait que chaque année, une somme de 3 millions d'euros, est déposée à l'agence Y.

2. $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $U_1 = A\,U_0 + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Le 1er janvier de l'année 2015, l'agence X possède 32,5 millions d'euros et l'agence Y possède 17 millions d'euros.

3. *a.* $P\,D\,Q = A$

b. Le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel $Q\,P$ est égal à $0,25 \times 3 + (-0,375) \times 2$ soit 0.

4. *a.* Soit $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$ on vérifie que $A\,C + B = C$

Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} U_{n+1} = A U_n + B \\ C = A\,C + B \end{cases}$ donc par soustraction membre à membre : $U_{n+1} - C = A\,(U_n - C)$ or $V_n = U_n - C$ donc pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A\,V_n$.

b. $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A\,V_n$ donc $V_n = A^n\,V_0$.

5. *a.* Le coefficient de la première ligne de la matrice V_n, est $[0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n] \times 45 + \dfrac{10}{3} \times 0,375 \times (-0,3^n + 0,7^n)$ soit $11,25 \times 0,3^n + 35,75 \times 0,7^n - 1,25 \times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n$ soit $10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n$.

b. $V_n = U_n - C$ donc $U_n = V_n + C$ donc $x_n = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n + 5$

c. $-1 < 0,3 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$ de plus $-1 < 0,7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 5$.

A long terme, la somme déposée dans l'agence X est de 5 millions d'euros.