On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que : $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n + 1$, pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points dans le plan muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

2\. *a.* Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe *s*, dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω, d'affixe ω.

b. Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle.

3\. *a.* Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $\Omega A_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. À partir de quelle valeur de *n* les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?

4. Pour tout entier naturel *n*, on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonal $A_0 A_1 \ldots A_n A_{n+1}$. Déterminer la limite de L_n quand *n* tend vers $+\infty$.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.

CORRECTION

1. $z_0 = 0$ donc $z_1 = \dfrac{1+i}{2} z_0 + 1 = 1$

$z_2 = \dfrac{1+i}{2} z_1 + 1 = \dfrac{1+i}{2} + 1 = \dfrac{3+i}{2}$

$z_3 = \dfrac{1+i}{2} z_2 + 1 = \dfrac{1+i}{2} \times \dfrac{3+i}{2} + 1 = \dfrac{3+i+3i-1}{4} + 1 = \dfrac{3+2i}{2}$

Les points A_1, A_2 et A_3 ont pour affixes respectives : 1 ; $\dfrac{3+i}{2}$ et $\dfrac{3+2i}{2}$

2\. *a.* Soit *s* la transformation d'écriture complexe $z' = \dfrac{1+i}{2} z + 1$.

s a une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$ avec $a \neq 0$ donc *s* est une similitude directe de rapport $|a|$ d'angle arg *a*.

$\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc la transformation *s* est une similitude directe d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Le centre de *s* est le point invariant donc son affixe est solution de $z' = z$ soit $z = \dfrac{1+i}{2} z + 1 \Leftrightarrow 2z = (1+i) z + 2 \Leftrightarrow z(1-i) = 2$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2}{1-i} = 1 + i$ donc le centre de *s* est le point Ω d'affixe $\omega = 1 + i$.

b. $s(A_n) = A_{n+1}$

donc $\Omega A_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n$ et $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\overrightarrow{A_n A_{n+1}} = \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} - \overrightarrow{\Omega A_n}$

donc $A_n A_{n+1}^2 = \Omega A_{n+1}^2 + \Omega A_n^2 - 2\, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} . \overrightarrow{\Omega A_n}$

$A_n A_{n+1}^2 = \dfrac{1}{2} \Omega A_n^2 + \Omega A_n^2 - 2\, \Omega A_{n+1} \times \Omega A_n \cos(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}, \overrightarrow{\Omega A_n})$

$A_n A_{n+1}^2 = \dfrac{3}{2} \Omega A_n^2 - 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n^2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$A_n A_{n+1}^2 = \dfrac{3}{2} \Omega A_n^2 - \Omega A_n^2 = \dfrac{1}{2} \Omega A_n^2$.

donc $\Omega A_{n+1} = A_n A_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n$ de plus $\Omega A_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2 = \Omega A_n^2$ donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_{n+1}

Autre démonstration

On pouvait aussi appeler H la projection orthogonale de A_{n+1} sur $[\Omega A_n]$

$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donc le triangle $\Omega H A_{n+1}$ est isocèle rectangle en H et $\Omega H = HA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_{n+1} = \frac{1}{2} \Omega A_n$ donc H est le milieu de ΩA_n donc $\Omega H = HA_{n+1} = HA_n$,

H est le centre du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$, $[\Omega A_n]$ est un diamètre du cercle donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}

$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_{n+1}

3. *a.* $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1$ et $\omega = \frac{1+i}{2} \omega + 1$ donc $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i}{2} (z_n - \omega)$

la suite $u_n = z_{n+1} - \omega$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$, de premier terme $u_0 = z_0 - \omega = -\omega$

donc $u_n = q^n u_0$ donc $|u_n| = |q|^n |u_0|$ or $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|u_0| = |1 + i| = \sqrt{2}$.

$|u_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ donc pour tout entier naturel n, on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. Les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 quand $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 0{,}001$

soit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} < 0{,}001 \Leftrightarrow \sqrt{2}^{\,n-1} > 1000 \Leftrightarrow (n-1)\ln\sqrt{2} > \ln 1000$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 1000}{\ln\sqrt{2}} + 1$.

$\frac{\ln 1000}{\ln\sqrt{2}} + 1 \approx 20{,}9$ donc à partir de $n = 21$, les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001

4. Pour tout entier naturel n, $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

a_n est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$$L_n = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

$-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} L_n = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{-\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$

5. $z_{n+1} - \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_n - \omega)$ et $z_{n+2} - \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_{n+1} - \omega)$

donc $z_{n+2} - \omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 (z_n - \omega)$ soit $z_{n+2} - \omega = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_n - \omega)$

$z_{n+4} - \omega = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_n - \omega)$ donc $z_{n+4} - \omega = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 (z_n - \omega)$

$z_{n+4} - \omega = -\frac{1}{4} (z_n - \omega)$ soit $\overrightarrow{\Omega A_{n+4}} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{\Omega A_n}$ donc pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.