Métropole La Réunion septembre 2016

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$.

1. *a.* Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ? Prouver cette conjecture.

2. Déterminer $z_{2\,016}$ dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

CORRECTION

1. *a.* $z_0 = 2$.

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
0,5	– 1	2	0,5	2	0,5

b. $z_0 = \mathrm{i}$, $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ donc

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$1 + \mathrm{i}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$	i	$1 + \mathrm{i}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$	i

c. $z_0 = z_3 = z_6$ donc on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$.

Initialisation : Si $n = 0$, $z_{3n} = z_0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : montrons pour tout entier n, que si $z_{3n} = 0$ alors $z_{3(n+1)} = z_0$

$z_{3n+1} = 1 - \frac{1}{z_{3n}} = 1 - \frac{1}{z_0} = \frac{z_0 - 1}{z_0}$, $z_{3n+2} = 1 - \frac{1}{z_{3n+1}} = 1 - \frac{z_0}{z_0 - 1} = -\frac{1}{z_0 - 1}$, $z_{3n+3} = 1 - \frac{1}{z_{3n+2}} = 1 + z_0 - 1 = z_0$ donc la propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $z_{3n} = z_0$.

2. $2\,016 = 3 \times 672$ donc $z_{2\,016} = z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. Si $z_0 = z_1$ alors $z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = z_0$ donc $z_0^{\,2} = z_0 - 1$ soit z_0 est solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = -3$ donc l'équation admet pour solutions $z_0' = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_0'' = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Si $z_0 = z_1$ alors pour tout n, $z_n = z_0$ donc, si $z_0 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z_0 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, la suite (z_n) est constante.