Pondichéry 2001

Dans tout le problème, C désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.
Question préliminaire : tracer, avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe C et la droite D d'équation $y = x$.

Partie A

1. *a*. Déterminer une équation de la tangente Δ à C au point I d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.
En déduire la position de C par rapport à Δ .

2. *a*. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. M et N sont les points de même abscisse x des courbes C et D respectivement.
Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe C . Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

2. Étude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln x$.

a. Justifier les limites de $u(x)$ en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variation de u.

b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.
Justifier que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.

3. Étude de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$. En déduire le tableau de variation de g.

4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe C et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question 2.*b*.

5. A étant le point d'abscisse α, de C, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C - Étude d'une suite

1. Montrer que le réel α défini dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \dfrac{1}{4}(x^2 + \ln x)$.

2. *a*. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

b. Prouver que $h\left(\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

c. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle on a : $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$.

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

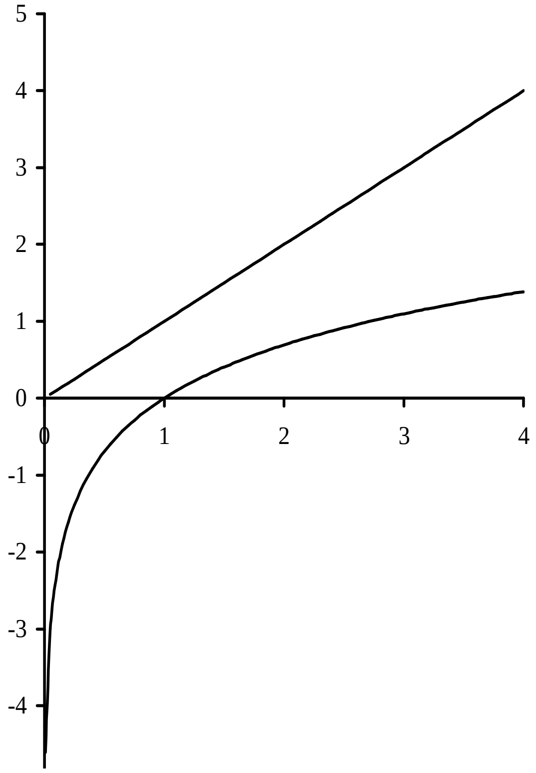
b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,

$$| u_{n+1} - \alpha | \leq 0{,}3 \, | u_n - \alpha | \text{ puis que } | u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n.$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

Question préliminaire :



Partie A

1. *a*. Soit $g(x) = \ln x$

$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $g'(1) = 1$ et $g(1) = 0$ donc une équation de la tangente Δ à C au point I d'abscisse 1 est $y = x - 1$

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.
En déduire la position de C par rapport à Δ .

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ donc si $x > 1$, $f(x) > 0$ et si $0 < x < 1$ alors $f'(x) < 0$
d'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

f est croissante sur $]\,0\,;1\,]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty\,[$ donc f admet un minimum en 1 et pour tout $x > 0$, $f(x) \le f(1)$ soit $f(x) \ge 0$
donc pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$, $x - 1 \ge \ln x$
La courbe C est en dessous de Δ, avec un point de contact pour $x = 1$.

2. *a*. pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$, $x - 1 \ge \ln x$ donc $x - \ln x \ge 1$
la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, elle est atteinte pour $x = 1$.

b. D est au dessus de C donc $MN = x - \ln x$
D'après la question précédente $MN \ge 1$, $MN = 1$ si $x = 1$
La plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance M N lorsque x décrit l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ est 1 unité soit 4 cm.

Partie B

1. M a pour coordonnées $(x\,;\ln x)$ donc $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2$ donc $OM = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$

2. *a*. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = 0$ or $u(x) = x^2 + \ln x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

$u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ donc $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

b. u est définie continue strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$; $u(]\,0\,;+\infty\,[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
$u(0{,}5) < 0$ et $u(1) > 0$ donc u s'annule sur $]\,0{,}5\,;1\,[$, de plus $u(0{,}65) < 0$ et $u(0{,}66) > 0$ donc u s'annule sur $]\,0{,}65\,;0{,}66\,[$
$0{,}65 < \alpha < 0{,}66$

c. u est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et s'annule en α donc si $0 < x < \alpha$, $u(x) < u(\alpha)$ soit $u(x) < 0$; $u(\alpha) = 0$
si $x = \alpha$, $u(x) = u(\alpha)$ soit $u(x) = 0$ et si $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$ soit $u(x) > 0$; $u(\alpha) = 0$

3. $g'(x) = 2x + 2\,\dfrac{1}{x}\,\ln x = \dfrac{2}{x}(x^2 + \ln x) = \dfrac{2}{x}\,u(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	

$g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln \alpha)^2$ or $\ln \alpha = -\alpha^2$ donc $g(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

4. $OM^2 = g(x)$ donc la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe C est obtenue pour $x = \alpha$

Cette distance est égale à $\sqrt{g(\alpha)} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ unités de longueur

$0{,}65 \leq \alpha \leq 0{,}66$ donc en prenant $\alpha \approx 0{,}655$ la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe C est environ de 0,782999011 unités de longueur soit 3,13 cm

5. A est le point de coordonnées $(\alpha ; \ln \alpha)$

la tangente en A a pour équation $y = \dfrac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha$

La droite (OA) a pour équation $y = \dfrac{\ln \alpha}{\alpha}\, x$

donc le produit des coefficients directeurs est égal à $\dfrac{\ln \alpha}{\alpha^2}$ or $\ln \alpha = -\alpha^2$ donc le produit des coefficients directeurs est égal à -1

La tangente en A à C est perpendiculaire à (OA).

Partie C - Étude d'une suite

1. $h(\alpha) = \alpha - \dfrac{1}{4}(\alpha^2 + \ln \alpha)$ or $\alpha^2 + \ln \alpha = 0$ donc $h(\alpha) = \alpha$. Le réel α défini dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$.

2. *a.* $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(2x + \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{2x^2 - 4x + 1}{4x}$

$\Delta = 16 - 4 \times 2 \times 1 = 8$

donc $2x^2 - 4x + 1$ s'annule en $x_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 < 0{,}5$ et $x_2 > 1$ donc $h'(x) > 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

h est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

b. h est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc $h\left(\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]\right) = [h(0{,}5) ; h(1)]$

$h(0{,}5) \approx 0{,}61$ et $h(1) = 0{,}75$ donc $[h(0{,}5) ; h(1)] \subset \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ soit $h\left(\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

c. $h''(x) = -\dfrac{1}{4}\left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2x^2 - 1}{4x^2}$

si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\dfrac{2x^2 - 1}{4x^2} = 0$

donc $2x^2 - 1 < 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc $h''(x) > 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

d. Pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $h''(x) > 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc h' est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $h'(0{,}5) \leq h'(x) \leq h'(1)$

or $h'(0{,}5) \geq 0$ et $h'(1) = \dfrac{1}{4}$ donc pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$

3. *a.* $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que si la propriété est vraie pour n (c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$), elle est vraie pour $n + 1$

$\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ or $h\left(\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc $h(u_n) \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ soit $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$u_1 - u_0 = -\frac{1}{4}(u_0^2 + \ln u_0) = -\frac{1}{4}$ donc $u_1 \leq u_0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ la propriété est héréditaire c'est-à-dire que si $u_{n+1} \leq u_n$ alors $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

La fonction h est croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ donc $h(u_{n+1}) \leq h(u_n)$ soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. La fonction h est définie dérivable sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, pour tout x de $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$, donc sur $[u_n ; \alpha]$ (ou $[\alpha ; u_n]$)

$| h(u_n) - h(\alpha) | \leq 0{,}3 \, | u_n - \alpha |$

or $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$ donc $| u_{n+1} - \alpha | \leq 0{,}3 \, | u_n - \alpha |$

$u_0 - \alpha = 1 - \alpha$ or $\alpha \in [0{,}6 ; 0{,}7]$ donc $0{,}3 \leq 1 - \alpha \leq 0{,}4$

donc $| u_0 - \alpha | \leq \frac{1}{2}$ soit $| u_0 - \alpha | \leq \frac{1}{2} \times 0{,}3^0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Supposons que $| u_n - \alpha | \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$ et montrons qu'alors la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^{n+1}$.

$| u_{n+1} - \alpha | \leq 0{,}3 \, | u_n - \alpha |$

$0{,}3 \, | u_n - \alpha | \leq \frac{1}{2} \, 0{,}3 \times (0{,}3)^n$

donc par transitivité ($a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$) on a : $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. $0 \leq | u_n - \alpha | \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

d. Il suffit d'avoir $\frac{1}{2}(0{,}3)^n \leq 10^{-5}$ pour que $| u_n - \alpha | \leq 10^{-5}$ donc que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près

$\frac{1}{2}(0{,}3)^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow 0{,}3^n \leq 2 \times 10^{-5} \Leftrightarrow n \ln 0{,}3 \leq \ln(2 \times 10^{-5}) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2 \times 10^{-5})}{\ln 0{,}3}$ (ln 0,3 est négatif)

or n est un nombre entier, il suffit donc d'avoir $n \geq 9$

$n_0 = 9$ et $u_{n_0} \approx 0{,}65292$