2016

Amérique du Nord juin 2016

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un Jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

D « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0.372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B. A t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B pu une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la **partie A**, au centième près.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = l$ et d'écart-type $\sigma '$, $\sigma '$ étant un réel strictement positif ;

Sachant que $P(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de $\sigma '$.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, Jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Antilles-Guyane juin 2016

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;

— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda \; ^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x$

a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a :

$P_{(T \geq t)}(T \geq t + a) = P(T \geq a)$.

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

b. Calculer la probabilité $P(T > 5000)$.

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Asie juin 2016

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie : A production de fraises

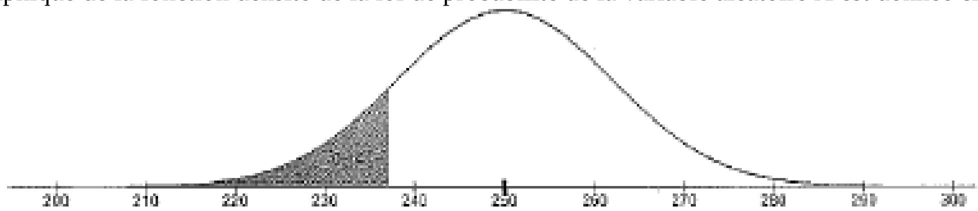
Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B : 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 dans la serre B, elle est égale à 0,84.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,43.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut lice modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b. Démontrer que $P\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$

c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par *n* et *m* des nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\,;250 + n]$.
Déterminer la plus petite valeur de *n* pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer *b* plus petite valeur de *n* pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

Centres étrangers juin 2016

Exercice 1 (4 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production. On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

Affirmation 1 : La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 *g* est supérieure à 0,9.

2. **Affirmation 2 :** L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans les questions 3 et 4, l'espace est rapporté à un repère orthonormal, et l'on considère les droites D_1 et D_2 qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z = t' + 4 \end{cases}$$

3. **Affirmation 3 :** Les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

4. **Affirmation 4 :** La droite D_1 est parallèle au plan P d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$.

Exercice 3 (5 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b. Quelle est la meilleure valeur approchée de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants ?

0,92 0,93 0,94 0,95

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal 400 ?

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50). Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que, la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

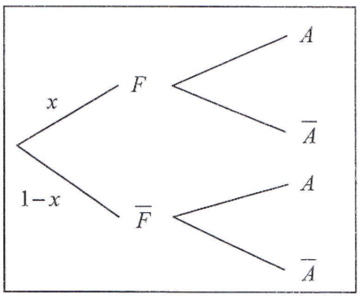
- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère ;
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'événement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $P(A) = 0,29$.



1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. En déduire une égalité vérifiée par le réel x.

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Liban juin 2016

Sur un court de tennis, un lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- La probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Métropole juin 2016

PARTIE A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste. Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur.
En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.
On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note : A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est P(S) = 0,89.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

PARTIE B

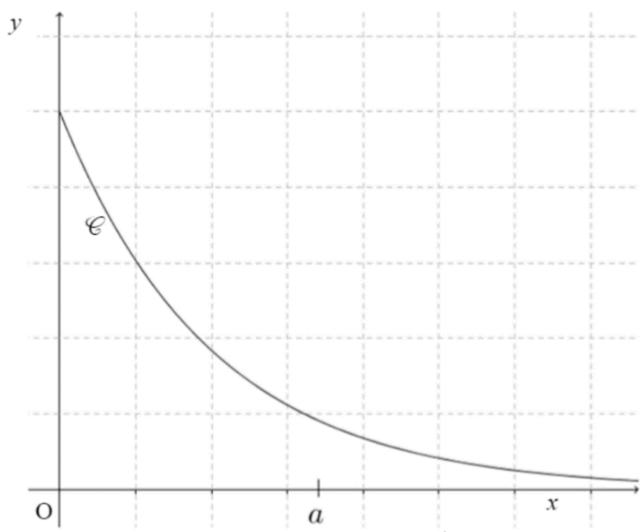
Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut. Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A. Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

PARTIE C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T.
On rappelle que :
- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $P(T \leq a) = \int_0^a f(x)\,dx$



1. La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-contre.

a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$

3. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.
Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans. Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance E(T)de la variable aléatoire T à l'unité près. Interpréter ce résultat.

Métropole – La Réunion septembre 2016

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. *a.* Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

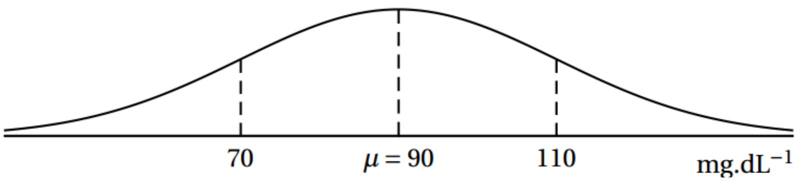
Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude *a* permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?

2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.

3. Dans cette question, on prend σ = 12. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.

Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.

2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

Nouvelle Calédonie Mars 2016

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.

Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.

On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

• A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
• D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
• B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
• L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
• S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

1. *a.* Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.

1. *b.* Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\dfrac{21}{40}$.

1. *c.* Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

2. *a*. Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

2. *b*. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

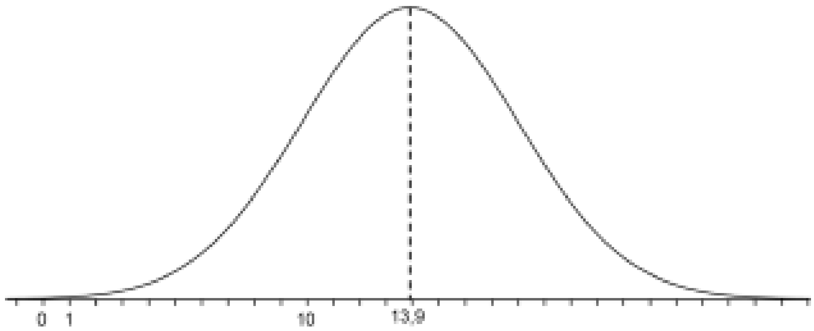
Pondichéry avril 2016

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\alpha = 13{,}9$ et d'écart type σ.

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous ;



1. On sait que $P(T \geq 22) = 0{,}023$. En exploitant cette information :

a. Hachurer, sur le graphique donné en annexe deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023.

b. Déterminer $P(5{,}8 \leq T \leq 22)$ Justifier le résultat.

Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des œuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole ($\mathscr{P}$) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans. Pour chaque jeune de cet échantillon

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui »:
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note *p* la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

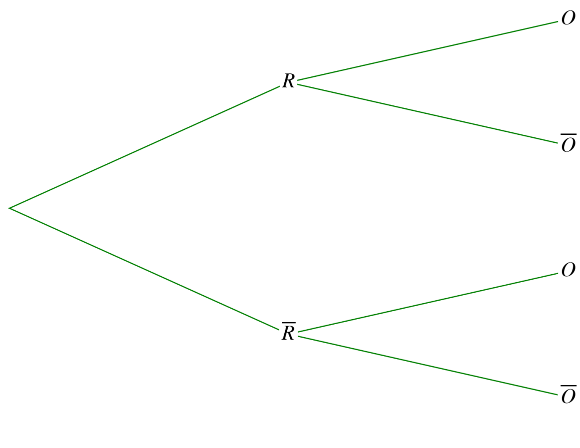
1. Calculs de probabilités

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ($\mathscr{P}$).

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair ».

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité *q* de l'évènement « le jeune a répondu « Oui » est : $q = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}$

2. Intervalle de confiance

a. A la demande de la Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathscr{P}$). Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ». Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion *q* de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion *p* de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

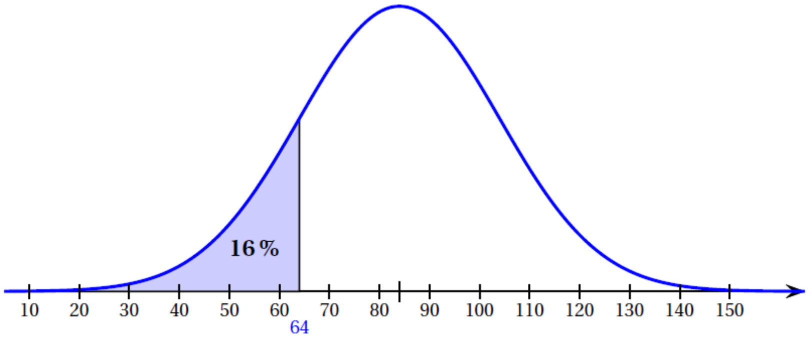
2015

Pondichéry avril 2015

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leq 64) = 0{,}16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. a. En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.

b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

b. Justifier que $P(X \leq 64) = P\left(Z \leq \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20{,}1$.

Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Amérique du Nord juin 2015

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché
Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.
Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.
1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B Contrôle à la réception
Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu.
On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».
1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes,
L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Centres étrangers juin 2015
Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.
Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A
1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.
Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.
Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B
D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.
1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*
Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C
On admet maintenant que, dans le magasin :
• 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
• 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
• 7 % des cadenas sont défectueux.
On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :
• p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
• H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
• D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».
1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

Métropole – La Réunion 9 septembre 2015

Question 4
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.
Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

Question 5
Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.
Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200

Asie juin 2015
Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.
On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.
Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].

Antilles-Guyane septembre 2015
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.
• 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
• 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0 ; 1].
Par ailleurs, 20 %des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A
1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B
Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C
Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

Amérique du Sud novembre 2015

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.
Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population.
On appelle :
— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »
On notera $\overline{M}$ (respectivement T) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement $\overline{T}$).
On note p ($0 \leq p \leq 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.
1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.
b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P(M \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.
b. Étudier les variations de la fonction f.
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.
Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.
1. a. Sous l'hypothèse $p = 0,15$, déterminer la loi de X.
b. Dans un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ?
Justifier. (On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.)
2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.
En utilisant l'échantillon de la question **1. b.**, proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Liban mai 2015

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.
Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
• A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
• B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
• V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».
1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

2013

Amérique du Nord mai 2013

Les parties A. B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	$P(X \leq x)$
380	0,035
385	0,086
390	0,182
395	0,325
400	0,5
405	0,675
410	0,818
415	0,914
420	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant :

Lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Amérique du Sud novembre 2013

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. ***a.*** Montrer que $P(M \cap C) = 0{,}03$.

b. Calculer $P(C)$.

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.

2. Déterminer $P(X = 35)$.

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Qu'en pensez-vous ?

Antilles Guyane juin 2013

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et I et X_n, une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \, ; \, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \, ; \, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A. On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note:

A l'événement « l'étudiant répond A »,

B l'événement « l'étudiant répond B »,

C l'événement « l'étudiant répond C »,

R l'événement « l'étudiant connait la réponse »,

$\overline{\text{R}}$ l'événement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'événement A est $\text{P(A)} = \dfrac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et en fonction de r.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p.

En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95% de r.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0{,}4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.
ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leq 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leq t)$ où X est la variable aléatoire de la question 2.*c*.

Annexe 1

E12 f_x =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	0,706	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984
28											

Extrait d'*une feuille de calcul*

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leq 245,3)$.

Asie juin 2013

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.
10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

– évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
– évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
– évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. *a*. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?
***b*.** Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.
On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.
1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.
2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

Centres étrangers juin 2013

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

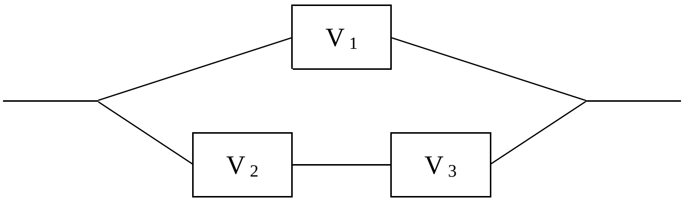
La durée de vie d'une vanne, exprimé en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2, V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre :

Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

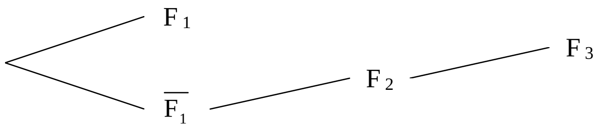


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6000 heures, on note :

- F_1 l'événement : « La vanne V_1 est en état de marche après 6000 heures » ;
- F_2 l'événement : « La vanne V_2 est en état de marche après 6000 heures »
- F_3 l'événement : « La vanne V_3 est en état de marche après 6000 heures »
- E l'événement : « le circuit est en état de marche après 6000 heures »

On admet que les événements F_1, F_2, F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité est égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation. Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que P(E) = 0,363.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises par la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.
2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leq D \leq 840)$.
2. Déterminer $P(D \leq 880)$.
3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Liban juin 2013

L’entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu’elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c’est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L’entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. Calculer la probabilité de l’évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3. Déterminer la probabilité de l’évènement C.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l’évènement E sachant que l’évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d’espérance $m_1 = 0,17$ et d’écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	ß	$P(\alpha \leq X \leq ß)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu’un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d’espérance $m_2 = 0,17$ et d’écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu’un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l’intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l’intervalle [0,16 ; 0,18].

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d’espérance 0 et d’écart-type 1.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,99
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Métropole juin 2013

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les évènements suivants :

– H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
– H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
– H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
– C : « l'arbre choisi est un conifère »,
– F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.
c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}

Métropole STI2D juin 2013

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.

A. Loi normale

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [74,4 ; 75,6].
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,25.

1. Calculer $P(74{,}4 \leq L \leq 75{,}6)$.
2. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir

$$P(75 - h \leq L \leq 75 + h) = 0{,}95\ ?$$

B. Loi binomiale

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20.
On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ».
On suppose que $P(D) = 0{,}02$.
On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

C. Intervalle de fluctuation

Le cahier des charges établit que la proportion de 2 % de pièces non conformes dans la production est acceptable.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pièces non conformes dans un échantillon de taille 80.

On veut savoir si la machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 80 dans lequel 3 pièces se révèlent être non conformes.

2. Quelle est la fréquence des pièces non conformes dans l'échantillon prélevé ?
3. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

Nouvelle Calédonie novembre 2013

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.

Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.

Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99% des billes correctes sont conservées.

On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement :

« la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement A.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Annexe

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	3,06E-138
3	1	2,08E-112
4	2	2,75E-89
5	3	7,16E-69
6	4	3,67E-51
7	5	3,73E-36
8	6	7,62E-24
9	7	3,19E-14
10	8	2,87E-07
11	9	0,00620967
12	10	0,5
13	11	0,99379034
14	12	0,99999971
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul

Polynésie juin 2013

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage haute qualité et un encodage standard.
On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considère les événements suivants :
C : « le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
V : « le morceau écouté est un morceau de variété » ;
J : « le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H : « le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
S : « le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?

b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de morceaux de musique classique de taille 60.
2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X, qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit une loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.
On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.
On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près que $P(180 \leq X \leq 220)$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

Annexe

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leq b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,5
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

• Un salarié malade est absent

• La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

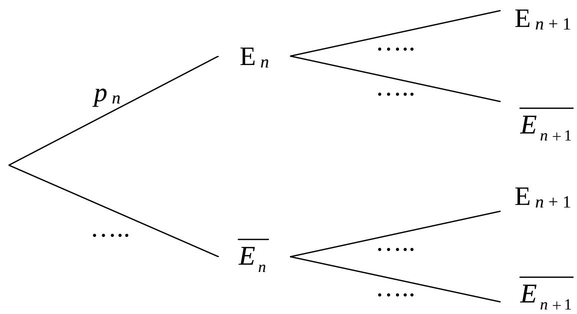
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$0 \leq p_n \leq 1$.

1. *a*. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. *a*. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04.$$

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P < $0{,}05 - 10^{-K}$ P prend la valeur 0,2 × P + 0,04 J prend la valeur J + 1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	– 1,55	– 1,24	– 0,93	– 0,62	– 0,31
$P(Z \leq x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379

x	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z \leq x)$	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question *b*., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».