Exercice n°7

1) On décompose $h = g \circ f$ avec $f(x) = 2x+4$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$ qui est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Puisque g s'applique à $f(x) = 2x+4$, il faut distinguer les deux cas $f(x) \leq 0$ et $f(x) \geq 0$.

Ainsi :

- Sur $]-\infty;-2]$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in]-\infty;-2]$, $f(x) = 2x+4 \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \in]-\infty;0]$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$.
- Sur $[2;+\infty[$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in [2;+\infty[$, $f(x) = 2x+4 \geq 0$, c'est-à-dire $f(x) \in [0;+\infty[$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

2) On décompose $h = g \circ f$ avec $f(x) = -2x+5$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$ qui est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Puisque g s'applique à $f(x) = -2x+5$, il faut distinguer les deux cas $f(x) \leq 0$ et $f(x) \geq 0$.

Ainsi :

- Sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$, f est strictement décroissante, et pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$, $f(x) = -2x+5 \geq 0$, c'est-à-dire $f(x) \in [0;+\infty[$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$.
- Sur $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$, f est strictement décroissante, et pour tout $x \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f(x) = -2x+5 \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \in]-\infty;0]$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

3) On décompose $h = g \circ f$ avec $f(x) = x^2$ qui est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $g(x) = -7x+1$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

- Sur $]-\infty;0]$, f est strictement décroissante, et pour tout $x \in]-\infty;0]$, $f(x) \in]-\infty;+\infty[$ (c'est une évidence !), intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$.
- Sur $[0;+\infty[$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) \in]-\infty;+\infty[$ (c'est une évidence !), intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictementdé croissante sur $[0;+\infty[$.

4) On décompose $h = g \circ f$ avec $f(x) = x+4$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = \frac{1}{x}$ qui est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Ainsi :

- Sur $]-\infty;-4[$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in]-\infty;-4[$, $f(x) \in]-\infty;0[$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;-4[$.
- Sur $]-4;+\infty[$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in]-4;+\infty[$, $f(x) \in]0;+\infty[$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante. Par composition, on conclut que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]-4;+\infty[$.