Partie A

La notation log, désigne le logarithme décimal. Par définition, pour tout nombre réel positif *x*, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif *x* et tout nombre entier *n*, $n = \log x$ si et seulement si $x = 10^n$.
On admet que pour tout nombre strictement positif *x* et tout nombre réel *y*, $x = 10^y$ si et seulement si $y = \log x$.

2. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif *a* et tout nombre réel strictement positif *b*, $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

On admet que $\log(a\,b) = \log a + \log b$ et $\log(a^n) = n \log a$ (*n* étant un nombre entier).

Partie B

L'intensité sonore I d'un son caractérise le volume du son. L'unité de mesure de l'intensité sonore est le watt par mètre carré ($W.m^2$).

Le niveau sonore N de ce son est donné par la relation $N = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, ou log désigne le logarithme décimal et I_0 est une intensité sonore de référence.

Le niveau sonore ainsi calculé est exprimé en décibel (dB) lorsque l'intensité sonore de référence I_0 est choisie égale à 10^{-12} $W.m^2$.

1. On considère deux sons : le premier d'intensité I_1, de niveau sonore N_1 et le second d'intensité I_2 et de niveau sonore N_2.
On suppose que $I_2 = 2\, I_1$. Calculer $N_2 - N_1$ (donner un résultat arrondi au dixième).

2. On considère le niveau sonore N = 50 dB d'une bibliothèque et celui N' = 110 dB d'une discothèque. On note I et I' les intensités sonores respectives de ces deux lieux.

a. Montrer que $\log\left(\dfrac{I'}{I}\right) = 6$

b. Déterminer la valeur de $\dfrac{I'}{I}$.

c. A l'aide de la relation : $N = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ exprimer l'intensité sonore I en fonction du niveau sonore N.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel strictement positif *x* et tout nombre entier *n*, $n = \log x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln 10} = n \Leftrightarrow \ln x = n \ln 10 \Leftrightarrow \ln x = \ln 10^n$
$\Leftrightarrow x = 10^n$

2. Pour tout nombre réel strictement positif *a* et tout nombre réel strictement positif *b*, $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\ln 10} = \dfrac{\ln a - \ln b}{\ln 10}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln a}{\ln 10} - \dfrac{\ln b}{\ln 10} = \log a - \log b$.

Partie B

1. $N_1 = 10 \log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right)$ donc $N_1 = 10(\log I_1 - \log I_0)$, de même $N_2 = 10(\log I_2 - \log I_0)$

$N_2 - N_1 = 10\,[(\log I_2 - \log I_0) - (\log I_1 - \log I_0)] = 10(\log I_2 - \log I_1)$

$N_2 - N_1 = 10 \log\left(\dfrac{I_2}{I_1}\right)$ or $\dfrac{I_2}{I_1} = 2$ donc $N_2 - N_1 = 10 \log 2$ soit $N_2 - N_1 \approx 3{,}0$

2. *a*. $N = 50 = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ et $N' = 10 \log\left(\dfrac{I'}{I_0}\right)$ donc $N' - N = 110 - 50 = 60$ et $N' - N = 10\left[\log\left(\dfrac{I'}{I_0}\right) - \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)\right]$

soit $60 = 10\left[\log I' - \log I_0 - (\log I - \log I_0)\right]$ donc $\log I' - \log I = 6$ soit $\log\left(\dfrac{I'}{I}\right) = 6$

b. $\log\left(\dfrac{I'}{I}\right) = 6$ or $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$ donc $\dfrac{I'}{I} = 10^6$ soit une intensité sonore un million de fois plus grande !

c. $N = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = \dfrac{N}{10} \Leftrightarrow \dfrac{I}{I_0} = 10^{\frac{N}{10}}$