On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111...11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).
On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001: expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.
Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$. Démontrer l'égalité $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10.
Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n non nul, $a_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1$
a_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 de premier terme 1 donc pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. Lorsqu'on effectue la division euclidienne des 2 002 premiers termes de la suite par 2001, on obtient 2002 restes compris entre 0 et 2000, or entre 0 et 2000, il existe 2001 nombres entiers donc pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste r ($n < p$).donc $a_n \equiv r$ modulo 2001 et $a_p \equiv r$ modulo 2001
Donc $a_p - a_n \equiv 0$ modulo 2001 donc le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 est 0.

3. $a_k = 1 + 10 + \ldots 10^{k-1}$ et $a_m = 1 + 10 + \ldots 10^{k-1} + 10^k + \ldots + 10^m$ ($k < m$)
donc $a_m - a_k = 10^k + \ldots + 10^m = 10^k (1 + 10 + \ldots + 10^{m-k})$
or $0 < k < m$ donc $m - k$ est un entier strictement positif soit $m - k \geq 1$; $1 + 10 + \ldots + 10^{m-k} = a_{m-k}$
donc $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. $2001 - 200 \times 10 = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, 2001 et 10 sont premiers entre eux.
le PGCD de 2001 et de 10 est 1
Pour tout entier naturel k ($k \geq 1$) 2001 et 10^k sont premiers entre eux.
Si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise $a_{m-k} \times 10^k$ or 2001 et 10^k sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss 2001 divise a_{m-k}.

5. Parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste et ($m_0 > k_0$) dans leurs la division euclidienne par 2 001, donc 2 001 divise $a_{m_0} - a_{k_0}$ donc 2 001 divise $a_{m_0 - k_0}$
L'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.