Pour tout entier naturel non nul n, on pose $M_n = 2^n - 1$
M_n est appelé nombre de Mersenne.

1. Calculer M_1, M_2, M_3 et M_4.

2. Pour a entier distinct de 1 et pour n entier naturel au moins égal à 2, montrer l'implication "si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$". (on pourra utiliser la somme : $1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$)

3. Montrer l'implication suivante: « Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si d divise n, alors M_d divise M_n ».

4. Montrer l'implication suivante : « Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si n est composé alors M_n est composé. »

5. Enoncer la contraposée de l'implication précédente. Puis énoncer la réciproque de cette contraposée. Cette réciproque est-elle vraie?

6. Soit a et b deux naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que le reste de la division euclidienne de M_a par M_b est M_r.

CORRECTION

1. $M_1 = 2 - 1 = 1$, $M_2 = 2^2 - 1 = 3$; $M_3 = 2^3 - 1 = 7$
$M_4 = 2^4 - 1 = 15$

2. $(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})(a - 1) = a^n - 1$
$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ et $a - 1$ sont des entiers naturels non nuls ($a \neq 1$) donc sont des diviseurs de $a^n - 1$
si $a^n - 1$ est premier, il n'admet comme diviseurs positifs que 1 et lui-même
donc soit $a - 1 = 1$ et donc $a = 2$
soit $a - 1 = a^n - 1$ donc $1 + a + \ldots + a^{n-1} = 1$ donc $a = 0$ ce qui est exclu
Pour a entier distinct de 1 et pour n entier naturel au moins égal à 2, si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$.

3. Si d divise n, il existe un entier naturel q tel que $n = d\,q$
donc $2^n = 2^{dq} = (2^d)^q$
$(1 + a + a^2 + \ldots + a^{q-1})(a - 1) = a^q - 1$ donc en choisissant $a = 2^d$:
$(1 + 2^d + (2^d)^2 + \ldots + (2^d)^{q-1})(2^d - 1) = (2^d)^q - 1$
soit $(1 + 2^d + 2^{2d} + \ldots + 2^{d(q-1)})(2^d - 1) = 2^{dq} - 1$
$(1 + 2^d + 2^{2d} + \ldots + 2^{d(q-1)})(2^d - 1) = 2^n - 1$
soit $(1 + 2^d + 2^{2d} + \ldots + 2^{d(q-1)})\, M_d = M_n$
$(1 + 2^d + 2^{2d} + \ldots + 2^{d(q-1)})$ est un entier naturel non nul donc M_d divise M_n

4. Si n est composé, il existe un entier naturel d non nul et différent de 1 tel que $n = d\,q$, donc d'après la question précédente : M_d divise M_n donc M_n est composé.

5. Si M_n est un nombre premier alors n est un nombre premier.
Réciproquement : si n est un nombre premier, M_n est un nombre premier.
$2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$
11 est un nombre premier et M_{11} n'est pas premier donc la réciproque est fausse.

6. Soit a et b deux naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b donc il existe un entier naturel q tel que $a = b\,q + r$
$M_a = 2^{bq+r} - 1 = (2^{bq} - 1)\, 2^r + 2^r - 1$
$M_a = (2^b - 1)(1 + 2^b + \ldots + (2^b)^{q-1})\, 2^r + 2^r - 1$
Soit $Q = (1 + 2^b + \ldots + (2^b)^{q-1})\, 2^r$
Q est un nombre entier donc $M_a = M_b \times Q + M_r$
$0 \leq r < b$ donc $1 < 2^r < 2^b$ donc $0 \leq M_r < M_b$
Le reste de la division euclidienne de M_a par M_b est M_r.