Amérique du Sud novembre 2006

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $a\,c \equiv b\,d \bmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On appelle ordre de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

CORRECTION

1. *a.* si $a \equiv b \bmod 7$ alors il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$
si $c \equiv d \bmod 7$ alors il existe un entier relatif k' tel que $c = d + 7k'$
$a\,c = (b + 7k)(d + 7k')$ donc $a\,c = b\,d + 7(k'b + k\,d + 7\,k\,k')$ donc $a\,c \equiv b\,d \bmod 7$.

b. Démonstration par récurrence :
Vérification, $a \neq 0$ et $b \neq 0$ donc $a^0 = b^0 = 1$ donc si $n = 0$, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.
Montrons que pour tout n, la propriété est héréditaire,
Hypothèse de récurrence : si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.
Question : si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \bmod 7$.

si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$

donc d'après la question précédente puisque $\begin{cases} a \equiv b \bmod 7 \\ a^n \equiv b^n \bmod 7 \end{cases}$ alors $a \times a^n \equiv b \times b^n \bmod 7$

soit $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \bmod 7$ la propriété est héréditaire donc si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

2. $a^3 = 8$ donc $a^3 \equiv 1 \bmod 7$
$3^2 \equiv 2 \bmod 7$ donc $3^4 \equiv 4 \bmod 7$ donc $3^6 \equiv 8 \bmod 7$ soit $3^6 \equiv 1 \bmod 7$

3. *a.* 7 est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par 7 donc d'après le théorème de Fermat, $a^{7-1} - 1$ est divisible par 7 soit $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. Soit r le reste de la division euclidienne de 6 par k, $0 \leq r < 6$, il existe donc un entier relatif q tel que $6 = k\,q + r$
$a^6 = a^{kq+r} = (a^k)^q \times a^r$ or $a^k \equiv 1 \bmod 7$ donc $a^6 \equiv a^r \bmod 7$ or $a^6 \equiv 1 \bmod 7$ donc $a^r \equiv 1 \bmod 7$.
k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$ et $0 \leq r < k$ donc $r = 0$.
k divise 6 donc $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

c. En mettant dans un tableau le reste de la division de a^n par 7 :

n	1	2	3	4	5	6	Ordre
2^n	2	4	1	2	4	1	3
3^n	3	2	6	4	5	1	6
4^n	4	2	1	4	2	1	3
5^n	5	4	6	2	3	1	6
6^n	6	1	6	1	6	1	2

4. $2006 = 3 \times 668 + 2$ donc $2^{2006} \equiv 2^2 \bmod 7$ soit $2^{2006} \equiv 4 \bmod 7$
$2006 = 6 \times 332 + 2$ donc $3^{2006} \equiv 3^2 \bmod 7$ soit $3^{2006} \equiv 2 \bmod 7$
$2006 = 3 \times 668 + 2$ donc $4^{2006} \equiv 4^2 \bmod 7$ soit $4^{2006} \equiv 2 \bmod 7$
$2006 = 6 \times 332 + 2$ donc $5^{2006} \equiv 5^2 \bmod 7$ soit $5^{2006} \equiv 4 \bmod 7$
$2006 = 2 \times 1003$ donc $6^{2006} \equiv 1 \bmod 7$.
donc $A_{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1 \bmod 7$ soit $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.