

Exercice 72 – Telecom Sud Paris 2013 - CCP 2005 - Soient u et v deux endomorphismes d'un espace de dimension n tels que $u \circ v = v \circ u$ et u a n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v ont une base commune de vecteurs propres. Même question si on suppose seulement que u et v sont diagonalisables.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad u(e_i) = a_i e_i$

Hypothèse : les valeurs propres a_i sont deux à deux distinctes.

Puisque $u \circ v = v \circ u$, $u(v(e_i)) = v(u(e_i)) = v(a_i e_i) = a_i v(e_i)$ ie $v(e_i) \in \text{Ker}(u - a_i \text{id})$.

Comme $n = \dim(E)$ valeurs propres de u sont deux à deux distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1 :

$\text{Ker}(u - a_i \text{id})$, contenant le vecteur non nul e_i , et de dimension 1, a pour base ce vecteur e_i . Il existe donc un scalaire b_i tel que $v(e_i) = b_i e_i$. Conclusion : B est également une base de vecteurs propres de v .

2° cas : u et v sont diagonalisables. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - a_i \text{id})$ et les p valeurs propres $a_1, \dots, a_p$ sont deux à deux distinctes.

Remarque : $p \leq n$

- Peut-on définir la restriction de v à $E_i = \text{Ker}(u - a_i \text{id})$? (ou plutôt l'endomorphisme induit par v sur E_i)
 $\forall x \in E_i \quad v(u(x)) = u(v(x))$ ie $u(v(x)) = v(a_i x) = a_i v(x)$: $v(x) \in \text{Ker}(u - a_i \text{id})$.
 E_i est stable par v ; on note v_i la restriction de v à E_i .
- L'endomorphisme v_i est la restriction de v , endomorphisme diagonalisable. Il existe un polynôme P scindé, non nul, à racines simples, tel que $P(v) = 0$ et donc $P(v_i) = 0$. Conséquence : v_i est diagonalisable (ou vous utilisez directement le résultat du cours) et il existe une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i , donc de v . Ces vecteurs de E_i sont par nature des vecteurs propres de u associés à la valeur propre a_i .
- Puisque $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - a_i \text{id})$, la réunion de ces bases est une base de E , formée de vecteurs propres de u et v . La propriété est bien prouvée.

Exercice X – ENS PSI 2013 - a) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices simultanément diagonalisables. Montrer qu'il existe une matrice C et des polynômes P et Q tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.
 b) Montrer que si A est de plus supposée à valeurs propres simples, alors il existe un polynôme R tel que $B = R(A)$.

a) Puisque A et B sont simultanément diagonalisables, il existe une matrice R inversible et deux matrices diagonales D et Δ telles que $A = RDR^{-1}$ et $B = R\Delta R^{-1}$; on note $d_1, \dots, d_n$ les termes diagonaux de D et $\delta_1, \dots, \delta_n$ ceux de Δ .

Soit $F = \text{diag}(1, \dots, n)$; comme les n réels $1, \dots, n$ sont deux à deux distincts, il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $P(i) = d_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (résultat sur les polynômes de Lagrange) et un unique polynôme Q de degré au plus $n-1$ tel que $Q(i) = \delta_i$, là encore pour $1 \leq i \leq n$.

Ce qui implique : $D = P(F)$ et $\Delta = Q(F)$, puis $A = P(RFR^{-1})$ et $B = Q(RFR^{-1})$; il suffit de poser $C = RFR^{-1}$ pour conclure.

b) et si A est à valeurs propres simples, il y en a n distinctes, et il suffit de remplacer les réels $1, \dots, n$, termes diagonaux de F , par les n valeurs propres distinctes de A . Ainsi $RFR^{-1} = A$ et $B = Q(A)$.