Antilles Guyane juin 2017

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.

Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

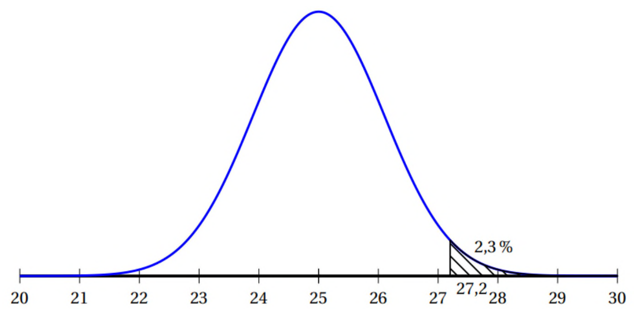
Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (µm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous.

On a pu déterminer que $P(X > 27{,}2) = 0{,}023$.



1. *a.* Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 µm. Arrondir à 10^{-3}.

2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.

La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ µm et d'écart-type σ_2.

a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.

Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

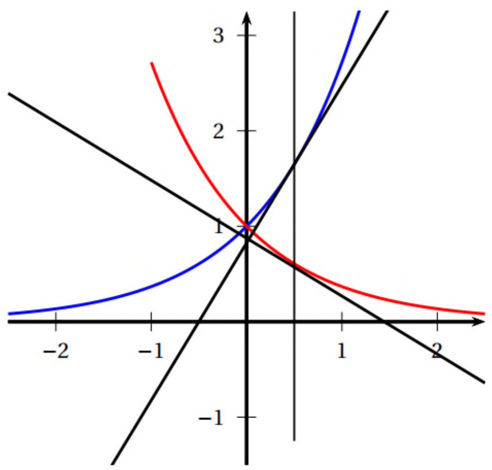
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a.

La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	– 3	2
3	– 2,5	2
4	– 2	2
5	– 1,5	2
6	– 1	2
7	– 0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2. *a.* Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; e]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n > 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur le graphique sont tracées les droites D3, D4 et D5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c. En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$.

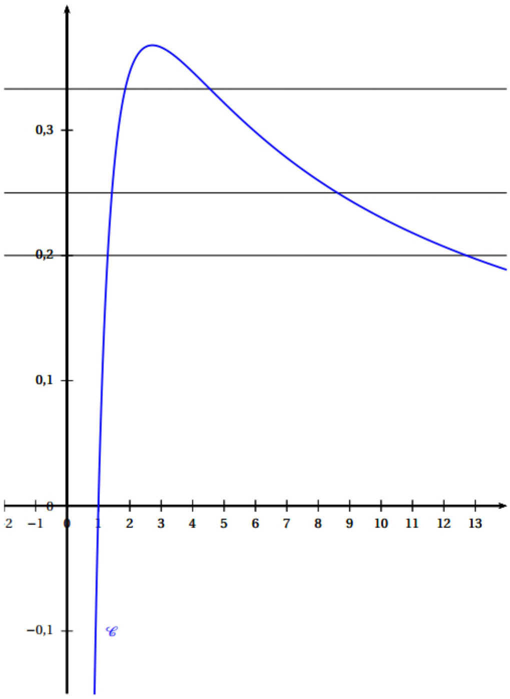
a. On admet que la suite (β_n) est croissante.

Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.

b. En déduire la limite de la suite (β_n).

ANNEXE

Cette annexe n'est pas à rendre.



EXERCICE 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 2\,u_n + 6$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n > 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. *a*. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2\,v_n = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier $n > 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. *a*. Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

b. En déduire que si n est de la forme $4\,k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{k})$.

On considère les points A(– 1 ; 2 ; 0), B(1 ; 2 ; 4) et C(– 1 ; 1 ; 1).

1. *a*. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, arrondie au degré.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (2 ; – 1 ; – 1).

a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soient P_1 le plan d'équation $3\,x + y - 2\,z + 3 = 0$ et P_2 le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2\,z + 6 = 0$.

a. Démontrer que le plan P_2 a pour équation $x = 2\,z$.

b. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

c. Soit la droite D dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2\,t \\ y = -4\,t - 3 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Démontrer que D est l'intersection des plans P_1 et P_2.

4. Démontrer que la droite D coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

CORRECTION

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

1. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^3 (z + 2) - (z + 2) = 0$ donc une solution entière de (E) est $z = -2$

2. pour tout nombre complexe z, $(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z + 1 = z^4 + 2z^3 - z - 2$

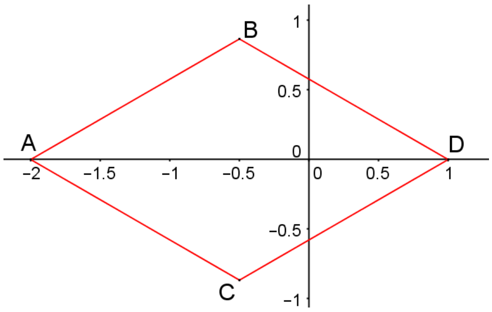
3. Résoudre l'équation (E) revient à résoudre $z^2 + z + -2 = 0$ et $z^2 + z + 1 = 0$

$z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 9$ et $z = -2$ ou $z = 1$

$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta = -3$ et $z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

Les solutions de (E) sont : 1 ; -2 ; $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

4. Soit les points d'affixes : A (-2), B$\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, C(1) et D$\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.



Le milieu des diagonales [AC] et [BD] est le point I d'affixe $-0,5$ donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
La droite (AC) a pour équation $y = 0$ et la droite (CD) a pour équation $x = -0,5$ donc ces deux droites sont perpendiculaires.
Les diagonales du quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires donc le quadrilatère ABCD est un losange.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $P(X > 27,2) = 0,023$ donc par symétrie par rapport à la droite $x = 25$, $P(X \leq 25 - 2,2) = 0,023$, la probabilité qu'une pièce soit non conforme est $P(X > 27,2) + P(X \leq 22,8) = 0,046$ donc $P(22,8 \leq X \leq 27,2) = 1 - 0,046$
La probabilité qu'une pièce soit conforme est 0,954.

b. Soit $T = \dfrac{X - 25}{\sigma_1}$, T suit une loi normale centrée réduite et $P(X \geq 27,2) = 0,023$ donc $P\left(T \geq \dfrac{27,2-25}{\sigma_1}\right) = 0,023$

donc $\dfrac{2,2}{\sigma_1} \approx 2$ soit $\sigma_1 \approx \dfrac{2,2}{2}$ donc 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

c. Il faut déterminer $P_{(22,8 \leq X \leq 27,2)}(X \leq 24) = \dfrac{P(22,8 \leq X \leq 24)}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} = \dfrac{0,159}{0,954} \approx 0,164$

2. *a.* Les lois X et Y ont la même espérance et $P(22,8 \leq X \leq 27,2) > P(22,8 \leq Y \leq 27,2)$ donc $\sigma_1 > \sigma_2$.

b. $n = 500$, $n\,p = 0,98 \times 500 = 490$ et $n(1 - p) = 10$ donc $n > 30$, $n\,p \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, les conditions d'applications d'un intervalle de fluctuation sont réunies.

$$I = \left[0,98 - 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times (1 - 0,95)}{500}} ; 0,98 + 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times (1 - 0,95)}{500}}\right]$$, donc $I \approx [0,967 ; 0,993]$

Sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes donc $f = 1 - \dfrac{15}{500} = 0,97$. $f \in I$ donc au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

1. $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = -e^{-x}$

La tangente au point M d'abscisse a de la courbe C_f a pour coefficient directeur $f'(a) = e^a$ et donc pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1 ; e^a)$

La tangente au point N à C_g a pour coefficient directeur $g'(a) = -e^{-a}$ et donc pour vecteur directeur $\vec{v}\,(1 ; -e^{-a})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + e^a \times (-e^{-a}) = 1 - 1 = 0$. La tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2. *a.* On peut conjecturer que PQ = 2.

b. Si a est l'abscisse de M, la tangente en M à C_f a pour équation $y = e^a (x - a) + e^a$ soit $y = e^a (x - a + 1)$
P est le point de cette tangente d'ordonnée 0 donc $x = a - 1$.

La tangente en N à C_g a pour équation $y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}$ soit $y = -e^{-a}(x - a - 1)$
Q est le point de cette tangente d'ordonnée 0 donc $x = a + 1$.
Pour tout réel a, $PQ^2 = [(a + 1)^2 - (a - 1)]^2 = [a + 1 - a + 1]^2 = 2^2$ donc PQ = 2.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. Soit $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x)$ *a* le même signe que $1 - \ln x$.

$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e} \geq x$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

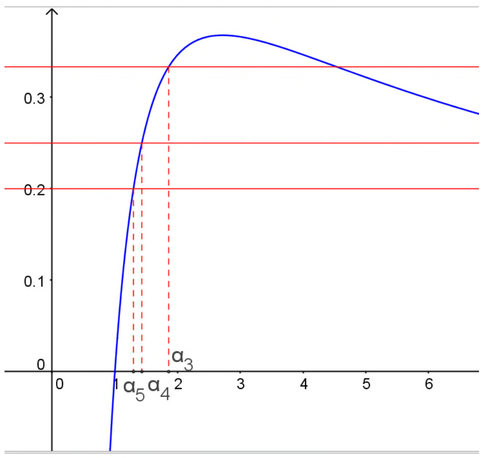
2. f est strictement croissante sur $]0 ; \mathrm{e}[$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e} ; +\infty[$ donc f admet un maximum en e égal à e^{-1}.

Partie B

1. f est définie, continue strictement croissante sur $]0 ; \mathrm{e}]$, $f(1) = 0$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}$ donc $f(\mathrm{e}) > \dfrac{1}{3}$ donc, pour $n \geq 3$, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{3}$

donc l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; \mathrm{e}]$ notée α_n.

2. *a.* D'après les premiers termes, la suite (α_n) semble être décroissante.



2. *b.* Pour tout $n \geq 3$, $n + 1 > n \geq 3 \geq \mathrm{e}$

donc $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \mathrm{e}^{-1}$ soit $f(1) < f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n) < \mathrm{e}^{-1}$

La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; \mathrm{e}]$ donc pour tout $n \geq 3$,
$1 < \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

x	1	α_{n+1}	α_n	e
f	0	$\dfrac{1}{n+1}$	$\dfrac{1}{n}$	e^{-1}

La suite (α_n) est décroissante.

c. La suite (α_n) est décroissante, minorée par 1 donc la suite (α_n) converge.

3. *a.* La suite (β_n) est croissante donc si $n \geq 3$, $\beta_n \geq \beta_3 \geq \mathrm{e}$ donc $\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3) \geq 1$

Pour tout $n \geq 3$, β_n est solution de l'équation de $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ soit $\ln(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$ en particulier $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$

donc en remplaçant dans $\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3) \geq 1$ on obtient que $\dfrac{\beta_n}{n} \geq \dfrac{\beta_3}{3}$ soit, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\beta_n > n\dfrac{\beta_3}{3}$.

b. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\beta_n > n\dfrac{\beta_3}{3}$, $\beta_3 \geq \mathrm{e}$ donc $\dfrac{\beta_3}{3} > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n\dfrac{\beta_3}{3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les points $A(-1 ; 2 ; 0)$, $B(1 ; 2 ; 4)$ et $C(-1 ; 1 ; 1)$.

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2 ; 0 ; 4)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(0 ; -1 ; 1)$, les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$

c. $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ et $AC^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$ donc $AB = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 4$ donc $2\sqrt{10} \cos \widehat{BAC} = 4$ soit $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{0,4}$ donc $\widehat{BAC} \approx 50,77$.

La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré est 51 °

2. *a.* $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times (-1) = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x - y - z = d$

A $\in$ (ABC) donc $2\,x_A - y_A - z_A = d$ soit $d = -4$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2\,x - y - z = -4$

3. *a.* P_2 est parallèle au plan d'équation $x - 2\,z + 6 = 0$ donc a une équation de la forme $x - 2\,z = d$
P_2 passe par O donc $d = 0$, le plan P_2 a pour équation $x = 2\,z$.

b. Deux plans sont soit parallèles soit sécants.
Un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{n_1}\,(3\,;1\,;-2)$, un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;-2\,;0)$
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles donc sont sécants.

c. les plans P_1 et P_2 sont sécants, leur intersection est une droite.

Soit la droite D dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2\,t \\ y = -4\,t - 3 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que D est l'intersection des plans P_1 et P_2, il suffit de vérifier que le point M de D de coordonnées $(2\,t\,;-4\,t-3\,;t)$ appartient à P_1 et à P_2, pour tout t réel.
P_1 est le plan d'équation $3\,x + y - 2\,z + 3 = 0$,
$3 \times 2\,t + (-4\,t - 3) - 2\,t + 3 = 6\,t - 4\,t - 3 - 2\,t + 3 = 0$ donc tout point M de D appartient à P_1
P_2 est le plan d'équation $x = 2\,z$, pour tout point M de D, $x = 2\,t$ et $z = t$ donc $x = 2\,z$ donc tout point M de D appartient à P_2
D est l'intersection des plans P_1 et P_2.

4. Le point M de D de coordonnées $(2\,t\,;-4\,t-3\,;t)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $2\,x - y - z = -4$.
$2 \times 2\,t - (-4\,t - 3) - t = -4 \Leftrightarrow 4\,t + 4\,t + 3 - t = -4 \Leftrightarrow 7\,t = - \ \Leftrightarrow t = -1$
la droite D coupe le plan (ABC) en un point I $(-2\,;1\,;-1)$

EXERCICE 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Il est possible de faire une récurrence ou bien d'utiliser une suite intermédiaire w.
Soit $w_n = u_n + 6$, $w_{n+1} = u_{n+1} + 6 = 2\,u_n + 12 = 2\,w_n$ donc (w_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $w_0 = u_0 + 6$ soit $w_0 = 9$ donc $w_n = 9 \times 2^n$
$u_n = w_n - 6$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 9 \times 2^n - 6 = 9 \times 2 \times 2^{n-1} - 6 = 6\,(3 \times 2^{n-1} - 1)$ donc si $n \geq 1$ $(n - 1 \geq 0)$ alors u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n > 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3. $95 = 5 \times 19$ donc v_6 n'est pas un nombre premier, l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier » est fausse

n	1	2	3	4	5	6
u_n	12	30	66	138	282	570
v_n	2	5	11	23	47	95

4. *a.* Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 6$ or $u_n = 6\,v_n$ donc $6\,v_{n+1} = 2 \times 6\,v_n + 6 = 6\,(2\,v_n + 1)$ donc après simplification :
$v_{n+1} = 2\,v_n + 1$ soit $v_{n+1} - 2\,v_n = 1$.

b. Pour tout entier $n > 1$, $v_{n+1} - 2\,v_n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. PGCD (u_{n+1}, u_n) = PGCD $(6\,v_{n+1}, 6\,v_n) = 6$ PGCD $(v_{n+1}, v_n) = 6 \times 1$
Pour tout entier $n \geq 1$, PGCD $(u_{n+1}, u_n) = 6$.

5. *a.* $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ donc $2^4 \equiv 1\ [5]$.

b. Si n est de la forme $4\,k + 2$, $u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6$.
$9 \equiv -1\ [5]$ et $6 \equiv 1\ [5]$ donc $u_n \equiv -(2^4)^k \times 2^2 - 1\ [5] \Leftrightarrow u_n \equiv -1 \times 2^2 - 1\ [5] \Leftrightarrow u_n \equiv -5\ [5] \Leftrightarrow u_n \equiv 0\ [5]$.
Si n est de la forme $4\,k + 2$, avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. Il suffit de remarquer que $u_0 = 3$ donc n'est pas divisible par 5.
Démontrons que pour tout n n'étant pas de la forme $4\,k + 2$, u_n n'est pas divisible par 5
Dans la division de n par 4, le reste r est un entier compris entre 0 et 3. $u_n = 9 \times (2^4)^k \times 2^r - 6$ donc $u_n \equiv -2^r - 1$
Si $r = 0$ $n = 4\,k$, $u_n \equiv -1 - 1\ [5]$ soit $u_n \equiv -2\ [5]$.
Si $r = 1$ $n = 4\,k + 1$, $u_n \equiv -2 - 1\ [5]$ soit $u_n \equiv -3\ [5]$.
Si $r = 3$ $n = 4\,k + 3$, $u_n \equiv -8 - 1\ [5]$ soit $u_n \equiv -9\ [5]$.
Dans tous ces cas u_n n'est pas divisible par 5. u_n est divisible par 5 si et seulement si n est de la forme $4\,k + 2$, avec k entier naturel.