CORRECTION DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

CHAPITRE 7 : DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

4ème année de l'enseignement secondaire Section Mathématique

Exercice 1 :

Déterminer pour chacun des entiers a ci-dessous, l'ensembleD_a de tous ses diviseurs. a = -13, a= -57 a= 205.

Correction :

D_{-13} = {-13, -1, 1, 13}

D_{-57} = {-57, -19, -3, -1, 1, 3, 19, 57}

D_{205} = {-205, -41, -5, -1, 1, 5, 41, 205}

Exercice 2 :

Le nombre -35763 est-il un multiple de 3 ? de 11 ? de7 ?

Correction :

La somme 3+5+7+6+3 est 24, multiple de 3 d'où -35763 l'est.

La différence (3+7+3)-(6+5)=13-11=2 n'est pas un multiple de 11 d'où -35763 ne l'est pas.

Concernant la divisibilité par 7, une astuce de calcul prouve pour qu'un entier soit divisible par 7 il faut et il suffit de retrancher 2 fois le chiffre des unités du nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des centaines etc... Et avoir un résultat divisible par 7.

Donnons nous un exemple : le nombre 343 est divisible par 7, en effet 34 -2x3=34-6=28≡0mod(7).

Prouvons ce résultat pour le nombre $\overline{abc}$.

En effet $\overline{abc}$ =100a+10b+c≡2a+3b+c mod (7).alors $\overline{ab}$ -2c=10a+b-2c≡10a+15b+5c mod(7)

≡5 (2a+3b+c) mod(7). Alors dire que $\overline{ab}$ -2c≡ 0 mod(7) équivaut à dire : D'après le lemme de GAUSS comme 7∧5=1 nécessairement 7 divise (2a+3b+c) et cela équivaut à $\overline{abc}$≡2a+3b+c mod (7)

≡0mod(7).même raisonnement pour tous les entiers naturels de 2 ,4,5… chiffres ou même plus.

Appliquons cela pour -35763, considérons l'entier positif 35763.

3576-2x3=3576-6=3570.

357-2x0=357.

35-2x7=35-14=21.

21 est divisible par7 et par suite 35763 est divisible par 7 et bien entendu -35763.

- Autre méthode consiste à voir tout simplement La division euclidienne de -35763 par 7 . -35763= 7x (-5109) +0. Le reste étant nul d'où il y a Divisibilité de -35763 par 7.

Exercice 3 :

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que a²-b²=15.

Correction :

1. D_{15}= {-15, -5, -3, -1, 1, 3,5, 15}
2. $a^2 - b^2$ =(a-b)(a+b)=15. Notons d'abord qu'on a nécessairement a≠b et a≠-b.

Ainsi d'après l'écriture précédente a-b et a+b sont deux diviseurs de 15 dont le produit est 15. Notons encore que ces deux diviseurs sont de même signe.

On résout le système a-b=-15 et a+b =-1 par exemple par élimination on aura 2a=-16 et alors a=-8 et on remplace cette valeur de a dans l'une de deux équations b=-1-a = -1-(-8)=-1+8=7.

Le couple (-8,7) est une solution de notre équation.

Maintenant si on pose a-b=-1 et a+b=-15 on obtient 2a = -16 et a = -8 puis b=-15-a=-15-(-8) b= -15+8=-7 on aura alors un autre couple de solution (-8,-7).

On refait ce raisonnement avec le couple (-5, -3)

a-b=-5 et a+b=-3 donc 2a=-8 et alors a=-4 par suite b=-3-a = -3 -(-4)= -3+4=1 et on aura le couple (-4,1) solution, on permute les valeurs -5 et -3 on obtient le système a-b=-3 et a+b=-5.

On aura 2a=-8 et a=-4 puis b=-5-a=-5-(-4)=-5+4=-1 alors le couple (-4,-1) est solution.

Avec le couple (1,15) on résout le système a-b=1 et a+b=15, on procède toujours par élimination on aura 2a=16 et alors a=8, puis b=15-a=15-8=7, ainsi le couple (8,7) est solution.

On permute les valeurs 1 et 15 le système à résoudre est a-b=15 et a+b=1.

On obtient 2a=16 et a=8 puis b=1-a=1-8=-7. On obtient ensuite un couple de solution (8,-7).

Finalement un couple à voir, c'est (3,5). a-b=3 et a+b=5 d'où 2a=8 et a=4 puis b=5-a=5-4=1.

On aura le couple de solution (4,1). Un dernier système est a-b=5 et a+b=3 d'où 2a=8 et a=4, b=3-a.

b=3-4=-1 un dernier couple de solution est (4,-1).

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-8,7), (-8,-7), (8,7), (8,-7), (-4,1), (-4,-1), (4,1), (4,-1)\}.$$

Exercice 4 :

Déterminer tous les entiers n tels que n divise n+5.

Correction :

n divise n+5 sig $\frac{n+5}{n} \in \mathbb{Z}$. (n≠0)

$\frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n} \in \mathbb{Z}$ sig que n divise 5 ainsi $n \in D_5 = \{-5,-1, 1,5\}$.

Exercice 5 :

Déterminer tous les entiers n tels que n-2 divise n-9.

Correction :

n-2 divise n-9 sig $\frac{n-9}{n-2} \in \mathbb{Z}$. (n≠2)

$\frac{n-9}{n-2} = \frac{n-2}{n-2} - \frac{7}{n-2} \in \mathbb{Z}$ sig n-2 divise 7.

Ainsi n-2 $\in D_7 = \{-7, -1, 1, 7\}$ par suite $n \in \{-5, 1, 3,9\}$.

Exercice 6 :

Soit un entier n≥0.

Montrer que $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Correction :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour n=0 : $3^0 - 2^0 = 1-1=0 \in M_7$.

Soit $n \in IN$ supposons P_n : $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Montrons P_{n+1} : $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7.

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^2\, 3^{2n} - 2x2^n \\ &= 9x3^{2n} - 2x2^n \\ &= 7x3^{2n} + 2x3^{2n} - 2x2^n \\ &= 7x3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7 sig qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ / $3^{2n} - 2^n = 7k$.

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 7x3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n) \\ &= 7x3^{2n} + 2x7k \\ &= 7 \text{ x } (3^{2n} + 2k) \\ &= 7k' \text{ sachant que } (k' = 3^{2n} + 2k) \end{aligned}$$

D'où $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \in M_7$.

Conclusion : $\forall$ n$\in$ IN, $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

<u>Autrement : on procède par congruence</u>

$3 \equiv 3 \bmod(7)$

Et $3^2 \equiv 2 \bmod(7)$ alors $(3^2)^n \equiv 2^n \bmod(7)$ $\forall$ n$\in$ IN, ainsi $3^{2n} - 2^n \equiv 0 \bmod(7)$ sig que $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Exercice 7 :

1. Ecrire la division euclidienne de 3171 par 19.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3171 par -19.

Correction :

1. 3171 = 19 x 166 + 17
2. 3171 = (-19) x (-166) + 17 (0≤17<|-19|)

Exercice 8 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de -307 par -7.

Correction :

307=7 x 43 + 6 donc -307= -7 x 43 – 6

= -7x43 -7 +7 -6 = -7x 44 +1 ($0\leq 1<|-7|$)

Exercice 9 :

Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le quotient et le reste de la division de a par b.

1. a=1345791113 et b=246812.
2. a= -1345791113 et b=246812.
3. a=1345791113 et b= - 246812.
4. a= - 1345791113 et b= - 246812.

Correction :

1. 1345791113 = 246812 x 5452 + 172089.
2. On multiplie l'égalité précédente par -1 on aura -1345791113=246812x (-5452) - 172089.

   -1345791113=246812x (-5452) -246812 + 246812 -172089

   =246812x (-5453) + 74723
3. 1345791113 = 246812 x 5452 + 172089.

   = -246812x (- 5452) + 172089.
4. On réécrit le résultat de 2. -1345791113 =246812x (-5453) + 74723

   = -246812 x 5453 + 74723

Exercice 10 :

Soit le polynôme $P(x)=x^4 - 32x^3 + 186x^2 - 280x + 125$.

1) Montrer que si n est un entier / P(n) =0, alors n divise 125.
2) Résoudre dans IR l'équation P(x) = 0.

Correction :

1) si n est un entier / P(n) =0, alors $n^4 - 32n^3 + 186n^2 - 280n+ 125 = 0$, sig

$125 = - n^4 + 32n^3 - 186n^2 + 280n$

$= n (-n^3 + 32n^2 -186n + 280)$ soit $-n^3 + 32n^2 -186n + 280 = k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi n.k = 125 et alors n est un diviseur de 125.

2) D_{125} = {-125, -25, -5, -1, 1, 5, 25, 125}.

La somme des coefficients(a_i) de ce polynôme est nul, en effet : 1-32+186-280+125=0.

Ainsi 1 est un zéro de ce polynôme qui s'écrit pour x∈IR, $P(x)=(x-1) (ax^3 +bx^2 +cx +d)$

$=ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx -ax^3 -bx^2 -cx- d$.

$= ax^4 +x^3(b-a) + x^2(c-b) + x (d-c) -d$. par identification on détermine le système:

a=1, -d =125

sig $\begin{cases} b-a= -32,\ c-b = 186,\ d-c= -280. \\ a=1 ,\ -d =125 \\ b= -32 + a = -32+1 = -31,\ c = 186 + b = 186 - 31 = 155 \end{cases}$

On aura alors $P(x)=(x-1) (x^3 -31x^2 +155x -125)$.

Alors p(x) = 0 sig x-1 = 0 ou $x^3 -31x^2 +155x -125= 0$.

Si on considère maintenant $Q(x)= x^3 -31x^2 +155x -125$

La somme des coefficients(b_i) de ce polynôme est aussi nul sig que 1 est un zéro de Q.

On écrit $Q(x) = (x-1) (\alpha x^2+\beta x+\mu)$

$=\alpha x^3 +\beta x^2+\mu x-\alpha x^2-\beta x-\mu$

$=\alpha x^3+ (\beta-\alpha) x^2+ (\mu-\beta) x-\mu$

$=x^3 -31x^2 +155x -125$ par identification on obtient le système :

$\begin{cases} \alpha=1,\ \beta - \alpha= -31 \\ \mu-\beta=155,\ -\mu= -125 \end{cases}$ sig $\alpha=1$, $\beta= \alpha -31=1-31= -30$, $\mu=125$.

et ainsi $Q(x) = (x-1)(x^2-30x+125)$, P s'écrit donc $P(x)=(x-1)^2(x^2-30x+125)$.

$P(x)=0$ sig $(x-1)^2=0$ ou $x^2-30x+125=0$: $\Delta'=15^2-125=225-125=100=10^2$.

$X'=15-10=5$; $x''=15+10=25$.

$$S_{IR} = \{1, 5,25\}$$

Exercice 11 :

Soit deux entiers naturels non nuls a et b.

On désigne respectivement par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Dans chacun des cas, déterminer, si possible a et b.

1. a +b =44, q = 6 et r = 2.
2. a +b = - 49, q = -13 et r = 11.
3. a +b = 42, q = -6 et r = 9.

Correction :

1. a=6b + 2 et a+b=44 par substitution on aura 6b+2+b =44 donc 7b + 2 = 44 ainsi 7b=42.

Et b = $\frac{42}{7}$ = 6. a= 44 – b =44-6=38.

Conclusion (a, b) = (38, 6)

2. a = -13b + 11 et a +b = -49 par substitution on aura -13b + 11 +b = -49 donc -12b + 11 = -49

D'où -12b=-49-11=-60 et alors b = $\frac{-60}{-12}$ = 5 par suite a= -13x5 +11 = -65 + 11 = -54.

Dans ce cas la division euclidienne s'écrit -54 = 5 x (-13) + 11 mais en fait ce n'est pas une division euclidienne puisque la condition $0\leq r <|b|$ n'est pas réalisée.

Ainsi dans ce cas il n'est pas possible de déterminer un couple (a, b) étant donné que a+b= -49, q=-13, r=11.

3. a= -6b + 9 et a+b = 42 par élimination on aura a-(a+b) = -6b+9-42 sig –b=-6b-33

sig 6b-b= -33 sig b=$\frac{-33}{5}$ et a= $-6 \times \frac{-33}{5} + 9 = \frac{198}{5} + 9 = \frac{243}{5}$.

Un tel couple (a, b) $\notin\mathbb{Z}^2$.

Exercice 12:

Déterminer les restes modulo 9 de -1, 10,-10,-27, et -25.

Correction:

$-1 \equiv 8 \bmod (9)$

$10 \equiv 1 \bmod (9)$

$-10 \equiv 8 \bmod (9)$

$-27 \equiv 0 \bmod (9)$

$-25 \equiv 2 \bmod (9)$

Exercice 13:

Déterminer les entiers n dans chacun des cas ci-dessous.

a. $n\equiv-2 \bmod(7)$ et $-10\leq n \leq 15$.

b. $n\equiv 6 \bmod(11)$ et $-6\leq n \leq 20$.

Correction :

a. $n\equiv-2 \bmod(7)$ et $-10\leq n \leq15$. Sig qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ / $n = -2 + 7k$ et $-10\leq n \leq 15$

Sig $-10\leq -2 + 7k \leq 15$ et $n = -2 + 7k$.

Sig $-10+2\leq 7k\leq 15 +2$ et $n = -2 + 7k$.

Sig $-8\leq 7k\leq 17$ et $n = -2 + 7k$.

Sig $\frac{-8}{7} \leq k \leq\frac{17}{7}$ et $n = -2 + 7k$.

Donc k = -1 et n = -9.

K= 0 et n = -2.

K = 1 et n = 5.

K = 2 et n = 12.

Conclusion : n ∈ {-9,-2, 5,12}.

b. n≡6mod(11) et -6≤ n ≤20 Sig qu'il existe k∈ℤ / $n = 6 + 11k$ et -6≤ n ≤20

Sig -6≤ $6 + 11k$ ≤20 et $n = 6 + 11k$

Sig -6-6≤11k≤20-6 et $n = 6 + 11k$

Sig -12≤11k ≤14 et $n = 6 + 11k$

Sig $\frac{-12}{11} \leq k \leq \frac{14}{11}$ et $n = 6 + 11k$

Donc k= -1 et n = -5.

K= 0 et n = 6.

K=1 et n = 17.

Conclusion : n ∈ {-5, 6,17}.

Exercice 14:

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1, non divisible par 3.

Montrer que n+1 ou n-1 est divisible par 3.

2. Soit n et p deux entiers naturels, montrer que l'un des entiers n, p, n-p ou n+p est divisible par 3

Correction :

1. D'après les donnés n n'est pas divisible par 3, cela se dit autrement, la division euclidienne de n par 3 est n= 3q + 1 ou bien n = 3q + 2, q ∈IN.

Alors supposons le premier cas : n=3q+1 alors n+1=3q+2 et n-1=3q, on voit ainsi que n-1 est divisible par 3.

Maintenant si n=3q+2, alors n+1=3q+3=3(q+1)=3q' et n-1= 3q+1, cette fois n+1 est divisible par 3.

2. Si l'un de deux entiers naturels n et p est divisible par 3 alors on ne prouve rien.

Alors supposons qu'aucun de deux entiers naturels est divisible par 3, déterminons un tableau qui généralise les restes modulo 3 de n, p, n+p et n-p.

n≡ mod(3)	p≡ mod(3)	n+p ≡ mod(3)	n-p≡ mod(3)
1	1	2	0
2	2	1	0
1	2	0	2
2	1	0	1

On consultant le tableau, on constate alors qu'un 0 apparait dans chaque ligne de l'un de deux colonnes : n+p ≡ mod(3) ou n-p≡ mod(3) ainsi on vient de prouver que l'un d'entiers n, p, n-p ou n+p est divisible par 3.

Exercice 15:

Soit deux entiers a et b tels que a≡ 3mod(15) et b≡ 11mod(15).

Déterminer les restes modulo 15 de a+b, a-b, -a, ab, $-a^2b$ et ab^2.

Correction:

a+b ≡14 mod (15).

a-b≡ -8 mod (15)

≡7mod (15).

-a≡-3 mod(15)

≡12mod(15).

ab≡33mod (15)

≡3mod(15).

a^2≡9mod(15) et $-a^2$≡-9mod(15)

≡6mod(15)

Donc $-a^2b$≡6x11mod(15)

$\equiv 6 \bmod (15)$.

$b^2 \equiv 121 \bmod (15)$

$\equiv 1 \bmod (15)$ et $ab^2 \equiv 1\text{x}3 \bmod (15)$

$\equiv 3 \bmod (15)$.

Exercice 16:

Soit trois entiers a, b, c tels que $a \equiv 2 \bmod (17)$, $b \equiv 4 \bmod (17)$, $c \equiv 5 \bmod (17)$.

Déterminer les restes modulo 17 de a+cb et $a^2 + b^2 + c^2$.

Correction:

$cb \equiv 20 \bmod (17)$

$\equiv 3 \bmod (17)$ et $a \equiv 2 \bmod (17)$ donc $a+cb \equiv 5 \bmod (17)$.

$a^2 \equiv 4 \bmod (17)$

$b^2 \equiv 16 \bmod (17)$

$c^2 \equiv 25 \bmod (17)$ $\equiv 8 \bmod (17)$

en conséquence

$a^2+b^2+c^2 \equiv 4+16+8 \bmod (17)$

$\equiv 28 \bmod (17)$

$\equiv 11 \bmod (17)$.

Exercice 17:

Soit deux entiers a, b tels que $a \equiv 5 \bmod (4)$, $b \equiv 2 \bmod (4)$.

Déterminer le reste modulo 4 de $3a^2+ab-9$.

Correction:

$a^2 \equiv 25 \bmod (4)$

$\equiv 1 \bmod (4)$ donc $3a^2 \equiv 3 \bmod (4)$.

$ab \equiv 10 \bmod (4)$

$\equiv 2 \bmod (4)$ par suite $3a^2 + ab - 9 \equiv 3+2-9 \bmod (4)$

$\equiv -4 \bmod (4)$

$\equiv 0 \bmod (4)$ alors le reste modulo 4 de $3a^2+ab-9$ est 0.

Exercice 18:

Soit un entier a tel que $a \equiv 7 \bmod (11)$.

Déterminer le reste modulo 11 de a (a+1) (a+2).

Correction:

$a \equiv 7 \bmod (11)$

$a+1 \equiv 8 \bmod (11)$ et $a+2 \equiv 9 \bmod (11)$

D'ou a (a+1) (a+2) $\equiv 7\text{x}8\text{x}9 \bmod (11)$

$\equiv 504 \bmod (11)$

$\equiv 9 \bmod (11)$.

Exercice 19:

1. Montrer que $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. En déduire le reste modulo 7 de $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+100^2$.

Correction:

1. Le principe du raisonnement par récurrence résout facilement l'affaire, en effet pour n=1

$1^2=\frac{1\text{x}2\text{x}3}{6}$, évidement vrai.

Soit $n \geq 1$ supposons P_n , montrons P_{n+1} .

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(n+1 + \frac{n(2n+1)}{6}\right)$ $=(n+1)\left(\frac{6n+6+2n^2+n}{6}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+4n+3n+6}{6}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{2n(n+2)+3(n+2)}{6}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right)$

$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ c'est P_{n+1} . D'où $\forall n\geq 1$ $1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Autrement : on va déterminer une application $f : IR \longrightarrow IR$ vérifiant $f(x+1)-f(x)=x^2$

Posons Δ l'opérateur linéaire définie sur l'ensemble des polynômes IR[X] par $\Delta P(x)=P(x+1)-P(x)$.

$\Delta(\alpha P+Q)(x)= (\alpha P+Q)(x+1)-(\alpha P+Q)(x)$

$=\alpha P(x+1) +Q(x+1)-\alpha P(x)-Q(x)$

$=\alpha (P(x+1)-P(x)) + (Q(x+1)-Q(x))$

$=\alpha \Delta P(x) + \Delta Q(x)$ $\forall (\alpha, P, Q) \in IRxIR[X]xIR[X]$. Donc Δ est linéaire.

Alors pour P=1, $\Delta 1=1-1=0$

Pour P= x, $\Delta x=x+1-x=1$

Pour $P=x^2$, $\Delta x^2=(x+1)^2-x^2=x^2+2x+1-x^2=2x+1$

Pour $P=x^3$, $\Delta x^3=(x+1)^3-x^3=x^3+3x^2+3x+1-x^3=3x^2+3x+1$.

Alors la fonction f est tel que $\Delta f(x)=x^2$ $\forall x\in IR$, posons $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Delta f(x)=a\,\Delta x^3+b\Delta x^2+c\,\Delta x+\Delta d=a(3x^2+3x+1)+b(2x+1)+c+0$.

$=3ax^2+3ax+a+2bx+b+c=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)$.

ET comme $\Delta f(x)=x^2$ on aura par identification le système $3a=1$, $3a+2b=0$, $a+b+c=0$ sig $a=\frac{1}{3}$ $b=\frac{-3a}{2}=\frac{-1}{2}$, $c = -a-b = \frac{-1}{3}+\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{6}$.

Ainsi $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$.

Ecrivons alors $f(2)-f(1)=1^2$

$\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}=2^2$

On fait une somme de ces n égalités, après simplifications

Il Nous reste ce qu'on demande vraiment :

$f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)$

$=(n+1)[\frac{1}{3}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{6}]=(n+1)[\frac{2n^2+4n+2-3n-3+1}{6})$

$f(n-1)-f(n-2)=(n-2)^2$ $=(n+1)\frac{[2n^2+n]}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=0$

$f(n)-f(n-1)=(n-1)^2$

$f(n+1)-f(n)=n^2$

2. $1^2+2^2+3^2+\dots\dots+100^2=\frac{100x101x201}{6}=50x101x67$

$50\equiv 1\bmod(7)$

$101\equiv 3\bmod(7)$ $50x101x67\equiv 12\bmod(7)$

$67\equiv 4\bmod(7)$ $\equiv 5\bmod(7)$ par suite $\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots\dots+100 \equiv 5\bmod(7)$.

Exercice 20:

Déterminer les restes modulo 10 de chacun des entiers 30757,15163 et 12924.

Correction:

30757=7+30750

=7+3075x10 on conclut alors que $30757\equiv 7\bmod(10)$.

De même $15163\equiv 3\bmod(10)$.

12924≡4mod(10).

Exercice 21

Déterminer les restes modulo 17 de 171^{171} , 186^{186} et 356^{583}.

Correction:

171=170+1

=17x10+1, ainsi 171≡1mod(17) par suite $171^{171} \equiv 1^{171} \bmod(17)$

≡1mod(17).

186= -1+ 187

=-1 + 17x11, ainsi 186≡-1mod(17) par suite $186^{186} \equiv (-1)^{186} \bmod(17)$

≡1mod(17).

356= -1 + 357

= -1 + 17x21, ainsi 356≡-1mod(17) par suite $356^{583} \equiv (-1)^{583} \bmod(17)$

≡ -1mod(17)

$\equiv 16 \bmod(17)$

Exercice 22

1. Déterminer le reste modulo 10 de-1.
2. Déterminer le chiffre des unités de 9^{2007} et 9^{2008}.

Correction:

1. -1≡ 9mod(10). En conséquence $(-1)^{2007} \equiv 9^{2007}$ mod(10).

On écrit autrement la congruence précédente 9^{2007} ≡-1mod(10)

≡9mod(10) ainsi le chiffre des unités de 9^{2007} est 9.

2. $(-1)^{2008} \equiv 9^{2008}$ mod(10). Ou bien 9^{2008} ≡1mod(10). 1 est alors le chiffre des unités de 9^{2008} .

Autrement : puisque $9^{2007} \equiv 9 \bmod(10)$ on multiplie par 9 les deux membres de cette congruences :

9^{2008}≡ 81mod(10)

≡1mod(10).

Exercice 23

Déterminer les restes modulo 16 de chacun des entiers49^{316},15^{2008} et$(-49)^{236}$.

Correction:

49=16x3+1, en conséquence 49 ≡ 1mod(16) et alors $49^{316} \equiv 1^{316} \bmod(16)$

$\equiv 1 \bmod(16)$.

15≡-1mod(16) donc $15^{2008} \equiv (-1)^{2008} \bmod(16)$

≡1mod(16).

49 ≡ 1mod(16) d'où -49≡-1mod(16) et $(-49)^{236} \equiv (-1)^{236}$ mod(16)

$\equiv 1 \bmod(16)$.

Exercice 24

Déterminer les restes modulo 13 de 4^3 et de$(121)^{357}$.

Correction:

4^3 = 64 = -1+13 x 5 donc 4^3 ≡-1mod (13).

≡12mod (13).

121=13x9+4 ainsi 121≡4mod(13), en conséquence $(121)^{357} \equiv 4^{357} \bmod(13)$.

$\equiv ((4)^3)^{119} \bmod (13)$.

$\equiv (-1)^{119} \bmod (13)$.

≡-1mod(13)

≡12mod(13).

Exercice 25

1. Déterminer les restes modulo 7 de$(50)^{99}$.

2. Déterminer les restes modulo 17 de $(50)^{99}$.

Correction:

1. 50=7x7+1 donc 50 ≡ 1mod(7) en conséquence $50^{99} \equiv 1^{99} \mathrm{mod}(7)$
$\equiv 1 \mathrm{mod}(7)$
2. 50 = - 1 +17x3 donc 50≡-1mod(17) en conséquence $50^{99} \equiv (-1)^{99} \mathrm{mod}(17)$
≡-1mod(17)
≡16mod(17).

Exercice 26

Déterminer le reste modulo 7 de 19^{52} x 23^{41}.

Correction:

19 =7x3 + (-2) d'où 19≡-2mod(7) et alors $19^{52} \equiv (-2)^{52} \mathrm{mod}(7)$.
$23=7\mathrm{x}3+2$ d'où $23 \equiv 2 \mathrm{mod}(7)$ et alors $23^{41} \equiv 2^{41} \mathrm{mod}(7)$.
On multiplie membre à membre les deux congruences on aura 19^{52} x$23^{41} \equiv (-2)^{52}$x$2^{41} \mathrm{mod}(7)$
$\equiv 2^{52}$x$2^{41} \mathrm{mod}(7)$
$\equiv 2^{93} \mathrm{mod}(7)$.
D'autre part on a $2 \equiv 2 \mathrm{mod}(7)$
2^2 ≡4mod(7)
2^3 ≡ 1Mod(7) ainsi ∀n∈IN , $2^{3n} \equiv 1 \mathrm{mod}(7)$, $2^{3n+1} \equiv 2 \mathrm{mod}(7)$, $2^{3n+2} \equiv 4 \mathrm{mod}(7)$
Alors puisque 93=3x31 on conclut alors : 2^{93}≡1mod(7), en conséquence 19^{52} x$23^{41} \equiv 1 \mathrm{mod}(7)$.

Exercice 27

1. Déterminer les restes modulo 13 de 5^4.
2. En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3} avec k∈IN.
3. Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et$5^{555555555555}$.
4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n, tels que 5^{2n+} 5^{n} ≡0mod(13)

Correction:

1. 5^2 ≡-1mod(13) donc $5^4 \equiv (-1)^2 \mathrm{mod}(13)$
$\equiv 1 \mathrm{mod}(13)$
2. Alors pour k∈IN, $5^{4k} \equiv 1 \mathrm{mod}(13)$, $5^{4k+1} \equiv 5 \mathrm{mod}(13)$, $5^{4k+2} \equiv 12 \mathrm{mod}(13)$, $5^{4k+3} \equiv 8 \mathrm{mod}(13)$
3. $202020202041 = 202020202040+1$
$= 4\mathrm{x}50505050510 + 1$donc $5^{202020202041} \equiv 5 \mathrm{mod}(13)$
$555555555555 = 555555555552+3$
$= 4\mathrm{x}138888888888 + 3$ donc $5^{555555555555} \equiv 8 \mathrm{mod}(13)$
4. Si $n \equiv 0 \mathrm{mod}(4)$ alors $2n \equiv 0 \mathrm{mod}(4)$ dans ce cas 5^{2n+} 5^{n} ≡1+1mod(13)
≡2mod(13)
Si $n \equiv 1 \mathrm{mod}(4)$ alors $2n \equiv 2 \mathrm{mod}(4)$ et dans ce cas 5^{2n+} 5^{n} ≡12+5mod(13)
≡17mod(13)
≡4mod(13)
Si $n \equiv 2 \mathrm{mod}(4)$ alors $2n \equiv 0 \mathrm{mod}(4)$ et dans ce cas 5^{2n+} 5^{n} ≡1+12mod(13)
≡13mod(13)
≡0mod(13)
Si $n \equiv 3 \mathrm{mod}(4)$ alors $2n \equiv 2 \mathrm{mod}(4)$ et dans ce cas 5^{2n+} 5^{n} ≡12+8mod(13)
≡20mod(13)
≡7mod(13).

En conséquence pour $n \equiv 2 \mathrm{mod}(4)$ on aura nécessairement 5^{2n+} 5^{n}≡0mod(13).
L'ensemble des entiers naturels n, tels que 5^{2n+} 5^{n} ≡0mod(13) est {4k+2, k∈IN}.

Exercice 28

1. Déterminer les restes modulo 5 de -1 *et de* -2 .
2. En déduire que $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ est divisible par 5.

Correction:

1. -1≡4mod(5) et -2≡3mod(5)

2. D'après ce qui précède $(-1)^{2099} \equiv 4^{2099} \mathrm{mod}(5)$ et $(-2)^{2099} \equiv 3^{2099} \mathrm{mod}(5)$, on fait la somme de ces deux congruences : $(-1)^{2099} + (-2)^{2099} \equiv 3^{2099} + 4^{2099} \mathrm{mod}(5)$. On rassemble les 4 puissances au même membre on aura $3^{2099} + 4^{2099}$ - $(-1)^{2099}$- $(-2)^{2099} \equiv 0\mathrm{mod}(5)$ d'où

$3^{2099} + 4^{2099} + 1^{2099} + 2^{2099} \equiv 0\mathrm{mod}(5)$.
$1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ Est alors divisible par 5.

Exercice 29

1. Vérifier que 999≡0mod(27)
2. a. montrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv$1mod(27).

b. En déduire le reste modulo 27 de10^{100+} 100^{10}.

Correction:

1. 999=27x37 d'où 999≡0mod(27)
2. a. d'après précédemment 999≡0mod(27) d'où 1000-1≡0mod(9) et 1000≡1mod(9) donc 10^3≡1mod(9) et alors ∀n∈IN $(10^3)^n \equiv 1^n \mathrm{mod}(27)$ par suite $10^{3n} \equiv$1mod(27).

Pour n=33, on aura 10^{99}≡1mod(27). Multiplie par 10 on obtient 10^{100}≡10mod(27).

Pour n=6, on aura 10^{18}≡1mod(27) ou bien $(10^2)^9$≡1mod(27) alors 100^9≡1mod(27).

Multiplions la dernière congruence par 100 on aura 100^{10} ≡100mod(27) et comme 10^{100}≡10mod(27)

On fait la somme membre à membre on obtient $100^{10} + 10^{100}$ ≡100+10mod(27)

≡110mod(27)

≡27x4 + 2mod(27)

≡2mod(27).

Ainsi le reste modulo 27 de10^{100} $+ 100^{10}$ est 2.

Exercice 30

Soit n un entier .Montrer que 2^n ≡1mod(5), si et seulement si, n est multiple de 4.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que 2^n ≡1mod(11).

Correction:

2≡2mod(5), 2^2≡4mod(5), 2^3≡3mod(5), 2^4≡1mod(5) par suite ∀k∈IN, 2^{4k}≡1mod(5) puis 2^{4k+1}≡2mod(5) et 2^{4k+2}≡4mod(5), enfin 2^{4k+3}≡3mod(5) en conséquence 2^n ≡1mod(5), si et seulement si, n est multiple de 4.

Un résultat est fourni par FERMAT, en effet 11 étant un nombre premier d'où 2^{11-1} ≡1mod(11).donc 2^{10}≡1mod(11) par suite ∀k∈IN, 2^{10k}≡1mod(11) alors pour tout entier n= 10k, k∈IN on a 2^n ≡1mod(11).

Exercice 31

Soit n un entier.

Quels sont les restes possibles modulo 5 de n² ?

Quels sont les restes possibles modulo 7 de n^3 ?

Correction:

Nous savons que les restes possibles modulo 5 d'un entier n sont 0, 1, 2,3 et 4.

Si n≡0mod(5) Alorsn²≡0mod(5)

Si n≡1mod(5) Alorsn²≡1mod(5)

Si n≡2mod(5) Alorsn²≡4mod(5)

Si n≡3mod(5) Alorsn²≡4mod(5)

Si n≡4mod(5) Alorsn²≡1mod(5)

Donc les restes possibles modulo 5 de n² sont 0,1 et 4.

De même les restes possibles modulo 7 d'un entier n sont 0, 1, 2, 3, 4,5 et 6.

Si n≡0mod(7) Alors n^3≡0mod(7)

Si n≡1mod(7) Alors n^3≡1mod(7)

Si n≡2mod(7) Alors n^3≡1mod(7)

Si n≡3mod(7) Alors n^3≡6mod(7)

Si n≡4mod(7) Alors n^3≡1mod(7)

Si n≡5mod(7) Alors n^3≡6mod(7)

Si n≡6mod(7) Alors n^3≡6mod(7)

Ainsi les restes possibles modulo 7 de n^3sont 0,1 et 6.

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

a. 2x≡4mod(10).
b. 4x≡8mod(10).

Correction:

a. 2x≡4mod(10), sig il existe k∈ $\mathbb{Z}$ / 2x=10k+4
Sig x=5k+2. $S_{\mathbb{Z}}$ = {5k+2, k∈ $\mathbb{Z}$

x≡ mod(5)	0	1	2	3	4
2x≡ mod(5)	0	2	4	1	3

b. 4x≡8mod(10) sig 2x≡4mod(5), dressons pour cela - un tableau

On consultant le tableau, on constate que l'unique cas pour avoir 2x≡4mod(5), est de prendre x≡2mod(5), ainsi $S_{\mathbb{Z}}$ = {5k+2, k∈$\mathbb{Z}$}

Autrement: 2 et 3 sont inversibles modulo 5 puisque 2x3=6≡1mod(5), alors on multiplie la congruence 2x≡4mod(5) par 3 aux deux membres on obtient x≡12mod(5). Donc x≡2mod(5) et alors x=5k+2, k∈ $\mathbb{Z}$

REMARQUE : les deux équations précédentes ont même ensemble de solutions, on dit qu'ils sont équivalentes, en effet x_0 solution de a. sig $2x_0$ ≡4mod(10) sig $2x_0$=4+10k (k∈$\mathbb{Z}$) on multiplie par 2 on aura $4x_0$=8 +10k'avec k'=2k d'ou $4x_0$≡8mod(10), ainsi x_0 solution de b.

Réciproquement : si x_0 solution de b. alors $4x_0$≡8mod(10) alors comme 4x3≡2mod(10) on multiplie l'équation b. par 3 et on obtient $12x_0$≡24mod(10) et alors $2x_0$≡4mod(10), x_0 est donc solution de a.

Exercice 33

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

a. X²≡0mod(4).
b. X²≡2mod (4).
c. X²≡3mod (4).

Correction:

a. On sait que les restes de x modulo 4 sont 0, 1,2et 3.
Alors x≡0mod(4) donne x²≡0mod(4).
x≡1mod(4) donne x²≡1mod(4).
x≡2mod(4) donne x²≡0mod(4).
x≡3mod(4) donne x²≡1mod(4).

Par suite les solutions de cette équation sont {x=4k, k∈$\mathbb{Z}$} ∪{x=4k+2, k∈$\mathbb{Z}$}.

b. D'après l'étude précédente 2 n'admet pas de racine carrée à l'égard de modulo (4), en conséquence $S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

c. Même réponse $S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

a. X²≡4mod(11).
b. X²≡-1mod(11).
c.X²≡-2mod(19).

Correction:

a. Traitons les restes possibles modulo 11 de x² pour un x∈$\mathbb{Z}$.
Si x≡0mod(11) alors x²≡0mod(11)
Si x≡1mod(11) alors x²≡1mod(11)
Si x≡2mod(11) alors x²≡4mod(11)
Si x≡3mod(11) alors x²≡9mod(11)
Si x≡4mod(11) alors x²≡5mod(11)
Si x≡5mod(11) alors x²≡3mod(11)
Si x≡6mod(11) alors x²≡3mod(11)
Si x≡7mod(11) alors x²≡5mod(11)
Si x≡8mod(11) alors x²≡9mod(11)
Si x≡9mod(11) alors x²≡4mod(11)
Si x≡10mod(11) alors x²≡1mod(11)
En consultant l'étude précédente on aura :

$X^2 \equiv 4 \bmod(11)$ a pour solution les entiers $x \equiv 2 \bmod(11)$ ou $x \equiv 9 \bmod(11)$,

$$S_{\mathbb{Z}} = \{2 + 11k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{9 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

b. $X^2 \equiv -1 \bmod(11)$

$\equiv 10 \bmod(11)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$. $S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

c. $X^2 \equiv -2 \bmod(19)$

$\equiv 17 \bmod(19)$

On adopte le même raisonnement de la question a. il faut traiter tous les restes de x modulo 19 et puis conclure le reste modulo 19 de x^2.

Exercice 35

Déterminer tous les entiers a et b / $ab \equiv -2 \bmod(8)$.

Correction:

Pour cela on va dresser un tableau de multiplication de a par b modulo 8.

D'abord $ab \equiv -2 \bmod (8)$ sig $ab \equiv 6 \bmod (8)$.

a≡ / b≡	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Notons que ces 8 solutions sont en fait 4 mais comme a et b jouent un rôle symétrique on aura 8 solutions.

8 cases sont indiquées dans ce tableau contenant un 6.chacun d'eux déterminent un couple d'entiers a et b tels que $ab \equiv 6 \bmod(8)$.

Ainsi $ab \equiv 6 \bmod(8)$ sig

$a \equiv 6 \bmod(8)$ et $b \equiv 1 \bmod(8)$ ou $a \equiv 1 \bmod(8)$ et $b \equiv 6 \bmod(8)$ ou bien

$a \equiv 3 \bmod(8)$ et $b \equiv 2 \bmod(8)$ ou $a \equiv 2 \bmod(8)$ et $b \equiv 3 \bmod(8)$ ou bien

$a \equiv 6 \bmod(8)$ et $b \equiv 5 \bmod(8)$ ou $a \equiv 5 \bmod(8)$ et $b \equiv 6 \bmod(8)$ ou bien

$a \equiv 7 \bmod(8)$ et $b \equiv 2 \bmod(8)$ ou $a \equiv 2 \bmod(8)$ et $b \equiv 7 \bmod(8)$.

Exercice 36

Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 + 6x + 5 = 0 \bmod(7)$.

b. $x^2 - 4x + 3 = 0 \bmod(7)$.

Correction:

a. $X^2 + 6x + 5 = 0 \bmod (7)$. Sig $x^2 + 6x + 9 - 4 \equiv 0 \bmod (7)$.

Sig $(x+3)^2 \equiv 4 \bmod(7)$.

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $u^2 \equiv 4 \bmod(7)$.

Les restes possibles de u modulo 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4,5 et 6.

Si $u \equiv 0 \bmod(7)$ alors $u^2 \equiv 0 \bmod(7)$.

Si $u \equiv 1 \bmod(7)$ alors $u^2 \equiv 1 \bmod(7)$.

Si $u \equiv 2 \bmod(7)$ alors $u^2 \equiv 4 \bmod(7)$.

Si $u \equiv 3 \bmod(7)$ alors $u^2 \equiv 2 \bmod(7)$.

Si $u \equiv 4 \bmod(7)$ alors $u^2 \equiv 2 \bmod(7)$.

Si u$\equiv 5mod(7)$ alors u²$\equiv 4mod(7)$.
Si u$\equiv 6mod(7)$ alors u²$\equiv 1mod(7)$.
Alors u²$\equiv 4mod(7)$ est vraie pour u$\equiv 2mod(7)$ ou bien $u\equiv 5mod(7)$.Revenons à notre équation $(x+3)^2\equiv$ 4mod(7), on prend x+3 $\equiv$ 2mod(7) d'où x$\equiv$ 6 mod(7) ou bien x+3 $\equiv$ 5mod(7)
D'où x$\equiv$ 2 mod(7). $S_{\mathbb{Z}}$= {6+7k, k∈ $\mathbb{Z}$} ∪ {2+7k, k∈ $\mathbb{Z}$}.

b. X² -4x+3 ≡0mod (8).Sig x²-4x+4-1≡0mod(8).
Sig (x-2)²≡ 1mod(8).

On procède comme précédemment, pour cela on résout l'équation dans $\mathbb{Z}$: u²$\equiv 1mod(8)$.
Si u$\equiv 0mod(8)$ alors u²$\equiv 0mod(8)$.
Si u$\equiv 1mod(8)$ alors u²$\equiv 1mod(8)$.
Si u$\equiv 2mod(8)$ alors u²$\equiv 4mod(8)$.
Si u$\equiv 3mod(8)$ alors u²$\equiv 1mod(8)$.
Si u$\equiv 4mod(8)$ alors u²$\equiv 0mod(8)$.
Si u$\equiv 5mod(8)$ alors u²$\equiv 1mod(8)$.
Si u$\equiv 6mod(8)$ alors u²$\equiv 4mod(8)$.
Si u$\equiv 7mod(8)$ alors u²$\equiv 1mod(8)$. Alors u²$\equiv 1mod(8)$ est vérifiée dés que u$\equiv 1mod(8)$ ou u$\equiv 3mod(8)$ *ou* u$\equiv 5mod(8)$ ou u$\equiv 7mod(8)$.
Ainsi pour (x-2)²≡ 1mod(8) on a nécessairement x-2≡ 1mod(8) sig x$\equiv 3mod(8)$ *ou bien*
x-2≡ 3mod (8) sig x$\equiv 5mod(8)$ *ou bien*
x-2≡ 5mod(8) sig x$\equiv 7mod(8)$ *ou bien*
x-2≡ 7mod(8) sig x$\equiv 1mod(8)$. $S_{\mathbb{Z}}$= {3+8k, k∈ $\mathbb{Z}$} ∪ {5+8k, k∈ $\mathbb{Z}$} ∪ $\{7+8k, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{1+8k,k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 37

1. Vérifier que $10^{20}\equiv 1mod(11)$.
2. En déduire le reste modulo 11 de 99999999999999999995.

Correction:

1. 10² =100$\equiv 1mod(11)$, *alors* $(10^2)^{10}\equiv 1^{10}$mod(11) et on aura $10^{20}\equiv 1mod(11)$.
2. 99999999999999999995=10^{20} - 5, et puisque $10^{20}\equiv 1mod(11)$ on a$10^{20}-5\equiv -4mod(11)$.

En conséquence 99999999999999999995$\equiv -4mod(11)$
$\equiv 7mod(11)$.

Exercice 38

Déterminer les restes modulo 103 de$10^{102}+3\text{x}10^{204}+106\text{x}10^{612}$.

Correction:

On rappelle un résultat de FERMAT : pour a∈ $\mathbb{N}$ et p premier non diviseur de a on aura $a^{p-1}\equiv 1mod(p)$.
103 étant un entier naturel premier alors d'après précédemment$\underline{10^{102}\equiv 1mod(103)}$, d'autre part $(10^{102})^2\equiv 1^2mod(103)$, D'où $10^{204}\equiv 1mod(103)$ et $\underline{3\text{x}10^{204}\equiv 3mod(103)}$.
Et enfin $(10^{102})^6\equiv 1^6$mod(103). D'où $10^{612}\equiv 1\text{mod}(103)$ et $\underline{106\text{x}10^{612}\equiv 106\text{mod}(103)}$.
On fait la somme des congruences soulignées on obtient$10^{102}+3\text{x}10^{204}+106\text{x}10^{612}$ ≡1+3+106mod(103)
$\equiv 110mod(103)$
$\equiv 7mod(103)$.

Exercice 39

Soit x un entier naturel.

1. Vérifier que x $(x^4$ -1) $\equiv 0mod(5)$.en déduire le reste modulo 5 de $(x^4$ -x²) (x²+1).

2. Vérifier que x $(x^6$-1)$\equiv 0mod(7)$. en déduire le reste modulo 7 de $(x^8$ -x^5) $(x^3$+1).

Correction:

1. On utilise le résultat de FERMAT énoncé dans l'exercice précédent puisque p=5 est premier, Soit x un entier naturel alors x^4 ≡1mod(5) et alors x^4 -1$\equiv 0mod(5)$.

On multiplie par x la congruence précédente on aura x $(x^4$ -1)$\equiv 0mod(5)$.
$(x^4$ -x²) (x²+1)=x²(x²-1)(x²+1)=x²$(x^4$-1).
Comme x $(x^4$ -1)$\equiv 0mod(5)$, on multiplie par x on obtient x²$(x^4$ -1)$\equiv 0mod(5)$.
En conséquence le reste modulo 5 de $(x^4$ -x²) (x²+1) est 0.

2. On refait le même raisonnement avec le nombre premier p=7.

Exercice 40

Soit p un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p. Déterminer les restes modulo p *de* a^{p-1}, a^{p-1}- 2, et $2a^{10p-10}$

Correction:

Concernant le reste de a^{p-1} modulo p, il suffit de voir qu'il s'agit du résultat de FERMAT déjà énoncé,

En conséquence $a^{p-1} \equiv 1\, mod(p)$.

Pour $a^{p-1} - 2$, $on\, a$: a^{p-1} - 2$\equiv 1 - 2mod(p)$.

$\equiv -1mod(p)$

Par suite a^{p-1} - 2$\equiv p - 1mod(p)$.

Finalement le reste modulo p de $2a^{10p-10} - 3$:

$a^{p-1} \equiv 1\, mod(p)$ Donc $(a^{p-1})^{10} \equiv 1^{10}$mod(p) ainsi $a^{10p-10} \equiv 1mod(p)$, et $2a^{10p-10} \equiv 2mod(p)$ puis $2a^{10p-10} - 3 \equiv 2 - 3mod(p)$

$\equiv -1mod(p)$

$\equiv p - 1mod(p)$.

Exercice 41

1. Soit un entier n≥ 0.

a. Déterminer le reste modulo 111 de 1000.

b. Montrer que les restes modulo 111 de n et 1000n sont égaux.

c. En déduire, sans utiliser la calculatrice, que chacun des nombres 111111, 100010001 et 100010000001 est divisible par 111.

2. Démontrer que 1001001001001 est divisible par 11111.

Correction:

1. a) 1000=111x9 + 1 d'où 1000$\equiv 1\, mod(111)$.

b) On suppose que n=111q+r avec 0$\leq r <$111 et q $\in \mathbb{N}$, alors n$\equiv r\, mod(111)$.

Et comme 1000$\equiv 1\, mod(111)$ on multiplie membre à membre les deux congruences on aura 1000n$\equiv r\, mod(111)$, par suite 1000n et n ont même reste modulo 111.

c) 111111=111000+111=111x1000+111.

D'après b. 111x1000 et 111 ont même restes modulo 111 d'où 111x1000$\equiv 111mod(111)$

$\equiv 0mod(111)$.

Et comme 111$\equiv 0mod(111)$ on fait la somme de ces deux congruences on aura

111111$\equiv 0mod(111)$.

100010001=100000000+10000+1

$=10^8 + 10^4$ +1

D'après b. $10^8 \equiv 10^5$ mod(111)

$\equiv 10^2$mod(111). Et $10^4 \equiv 10mod(111)$ on fait la somme de ces deux congruences on aura $10^8 + 10^4 \equiv 10^2$ + 10 mod(111) enfin on ajoute 1 aux deux membres.

En conséquence 100010001$\equiv 10^2$ + 10 +1 mod(111)

$\equiv 111mod(111)$

$\equiv 0mod(111)$.

100010000001=100000000000+10000000+1

$=10^{11} + 10^7$+1 comme $10^{11} \equiv 10^8$mod(111)$\equiv 10^5$mod(111)$\equiv 10^2$mod(111).

On refait avec $10^7 \equiv 10^4$ mod(111)

$\equiv 10mod(111)$ on fait la somme $10^{11} + 10^7 \equiv 10^2$ + 10mod(111) puis on ajoute le 1 aux deux membres $10^{11} + 10^7$+1$\equiv 10^2$ + 10 +1 mod(111)

$\equiv$ 111mod(111)

$\equiv 0mod(111)$.

2. on procède comme précédemment on prouve d'abord que pour un entier n≥ 0 alors n et 100000n ont même reste modulo 11111, cela est évident puisque 100000$\equiv 1mod(11111)$ et si n$\equiv r\, mod(11111)$ par multiplication 100000n≡rmod(11111).

On voit ainsi, que n et 100000n ont même reste modulo 11111.

1001001001001=1+10^3+10^6+10^9+10^{12}.

Comme 10^5n$\equiv nmod(11111)$. $alors\ 10^{12} \equiv 10^7$ mod(11111)

$\equiv 10^2$mod(11111)

$10^9 \equiv 10^4$mod(11111) encore $10^6 \equiv 10 mod(11111)$.

Finalement 1001001001001$\equiv 1 + 10^3$ $+10^2$+10^4+10mod(11111)

$\equiv 1 + 1000 + 100 + 10000 + 10 mod(11111)$

≡11111mod(11111)

$\equiv 0 mod(11111)$.Conséquence : 1001001001001 est divisible par 11111

Exercice 42

Soit un entier naturel.

Quel est le reste modulo 4 de$1^n + 2^n$+3^n+4^n.

Correction:

- Cas de n=0.

$1^n + 2^n$+3^n+4^n =4≡ $0 mod(4)$.

- Cas de n=1.

$1^n + 2^n$+3^n+4^n =10≡ $2 mod(4)$.

- Cas général : n≥ 2.

1^n=1≡ $1 mod(4)$.

2^n Est un multiple de 4 donc$2^n \equiv 0 mod(4)$.

3≡ $3 mod(4)$ et 3²≡ $1 mod(4) d' ou$ $3^n \equiv 1 mod(4) si\ n = 2k\ et$ $3^n \equiv 3 mod(4)$ si n=2k+1.

En ce qui concerne $4^n \equiv 0 mod(4)$.

Alors si n=2k on a $1^n + 2^n$+3^n+4^n ≡ 1+1mod(4)

$\equiv 2 mod(4)$.

Si n=2k+1 on a $1^n + 2^n$+3^n+4^n ≡ 1+3mod(4)

$\equiv 0 mod(4)$.

Exercice 43

Soit n un entier naturel.

1. Déterminer pour tout entier n de {0, 1, 2, 3, 4, 5,6} le reste modulo 7 de 3^n .
2. Montrer que 3^{n+6} - 3^n est divisible par 7.
3. a) calculer le reste modulo 7 de3^{1000} .

b) quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?

c) soit c la somme des chiffres du nombre 3^{1000} .quelle est le reste modulo 7 de c.

Correction:

1) 3^0=1≡ 1mod(7), 3^1 =3≡ $3 mod(7)$, 3^2=9≡ $2 mod(7)$,3^3=27≡ $6 mod(7)$,$3^4 = 81 \equiv 4 mod(7)$.

3^5=243≡ $5 mod(7)$, 3^6=729≡ $1 mod(7)$.

2) $3^{n+6} - 3^n$=3^n(3^6-1)or 3^6=729≡ $1 mod(7)$ d'où 3^6-1≡ $0 mod(7)$ en conséquence par multiplication par 3^n on aura 3^n(3^6-1)≡ $0 mod(7)$.

3) a. 1000≡ $4 mod(6)$ donc $3^{1000} \equiv 3^4$mod(7)

$\equiv 4 mod(7)$. D'où 4 est le reste modulo 7 de3^{1000} .

b. 3≡ $3 mod(10), 3^2 \equiv 9 mod(10), 3^3 \equiv 7 mod(10), 3^4$≡1mod(10).

$comme$ 1000≡0mod(4) donc $3^{1000} \equiv$ 1mod(10), en conséquence 1 est le chiffre des unités de3^{1000} .

c. Alors là je pense que cette question si intense et impitoyable en cache une défaillance quelque part.

Exercice 44

Soit a et b deux entiers.

1. vérifier que a^3≡a mod(3).
2. Montrer les équivalences ci-dessous.

a^3 -b^3≡0mod(3) équivaut à a-b≡0mod(3).

a^3+b^3≡0mod(3) équivaut à a+b≡0mod(3).

a^3+2b^3≡0mod(3) équivaut à a+2b≡0mod(3).

Correction:

1. Traitons les trois cas a/ a≡0mod(3), b/ a≡1mod(3), c/ a≡2mod(3)

a/ si a≡0mod(3) alors $a^3 \equiv 0^3$ mod(3) d'où a^3≡0mod(3) et alors a^3≡a mod(3).

b/si a≡1mod(3) alors $a^3 \equiv 1^3$ mod(3) d'où a^3≡1mod(3) et alors a^3≡amod(3).

c/ si a≡2mod(3) alors $a^3 \equiv 2^3$ mod(3) d'où $a^3 \equiv 8 \mathrm{mod}(3)$ donc $a^3 \equiv 2\mathrm{mod}(3)$ et alors a^3≡amod(3).

2. - voyons la première équivalence, d'abord on sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Alors supposons que a-b≡0mod(3), on multiplie les deux membres de la congruence par (a^2+ab+b^2) on aura $a^3 - b^3$≡0mod(3)

L'autre sens alors si $a^3 - b^3$≡0mod(3) d'après la question 1) a^3≡a mod(3) même b^3≡b mod(3).

La différence de deux congruences donne a^3-b^3≡a-b mod(3) et comme par hypothèse

$a^3 - b^3$≡0 mod(3) alors a-b≡0 mod(3).

- Concernant la deuxième équivalence, supposons que a^3+b^3≡0mod(3) d'après la question 1) a^3≡a mod(3) de même b^3≡b mod(3). Alors on fait la somme on obtient a^3+b^3≡a+b mod(3) par suite a+b≡0 mod(3).

Réciproquement si a+b≡0 mod(3), on sait que $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. On multiplie les deux membres de la congruence par (a^2-ab+b^2) on aura a^3+b^3≡0mod(3).

-La troisième congruence supposons que a^3+2b^3≡0mod(3) on fait appel à la question 1) alors a^3≡a mod(3) et b^3≡b mod(3) d'où2 b^3≡2b mod(3) et la somme donne a^3+2b^3≡a+2b mod(3) et comme par hypothèse a^3+2b^3≡0mod(3) on a alors a+2b≡0mod(3).de même si l'hypothèse était

a+2b≡0mod(3), nécessairement on aura a^3+2b^3≡0mod(3) d'où l'équivalence.

Exercice 45

Soit a un entier.

1. Déterminer les restes modulo 11 de a, a^2, a^3 .
2. En déduire que a^3-b^3≡0mod(11) si et seulement si a-b≡0mod(11).

Correction:

1.

a≡ mod(11)	a^2≡ mod(11)	a^3 ≡ mod(11)
0	0	0
1	1	1
2	4	8
3	9	5
4	5	9
5	3	4
6	3	7
7	5	2
8	9	6
9	4	3
10	1	10

2. il y a un sens trivial d'abord si a-b≡0mod(11) alors a≡b mod (11) d'ou $a^3 \equiv b^3 \mathrm{mod}(11)$ et donc a^3-b^3≡0mod(11) c'est évident.

L'autre sens, supposons que a^3-b^3≡0mod(11) c'est-à-dire $a^3 \equiv b^3 \mathrm{mod}(11)$ alors voyons le tableau précédent, tous les restes possibles de a^3 modulo 11 sont 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 qui sont deux à deux ≠ , auquel cas pour deux restes différents r_i et r_j $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ de a modulo 11 on fait correspondre d'après ce tableau deux restes différents r'_i et r'_j de a modulo 11 et cela équivalent à dire que si $a^3 \equiv b^3 \mathrm{mod}(11)$ alors nécessairement a≡b mod(11) .

Exercice 46

Soit n un entier naturel non nul.

Montrer par récurrence que

a. 16^n≡1-10n mod(25).

b. 7^n≡6n+1 mod(36).

c.4^n≡3n+1 mod(9).

d. $2^n + 3^n \equiv 5^n$ mod(6).

Correction:

a. Pour n=1 ,16≡1-10 mod(25) c'est-à-dire 16≡-9 mod(25) cela est correcte.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons P_n et montrons P_{n+1} .

On a l'hypothèse de récurrence 16^n≡1-10n mod(25), multiplions les deux membres par un 16 on aura

16^{n+1} ≡16 -160n mod(25)

≡1+15 +10-10 -10n -150n mod(25).

≡1 – 10(n+1) + 25 -150n mod(25).

≡1 – 10(n+1) + 25(1-6n) mod(25).

≡1 -10(n+1) mod(25). Alors c'est P_{n+1} .

Conclusion : $\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, $16^n\equiv1-10n$ mod(25).

b. Pour n=1, $7\equiv6\times1+1$ mod(36) donc $7\equiv7$mod(25), c'est évident.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons P_n et montrons P_{n+1} .

On a l'hypothèse de récurrence $7^n\equiv6n+1$ mod(36) multiplions les deux membres par un 7 on aura $7^{n+1}\equiv42n+7$ mod(36)

$\equiv6n+6+1+36n$ mod(36)

$\equiv6(n+1)+1$ mod(36) d'où on prouve facilementP_{n+1}.

Conclusion : $\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, $7^n\equiv6n+1$ mod(36).

c.Pour n=1, $4\equiv3\times1+1$mod(9) c'est correcte.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons P_n et montrons P_{n+1} . On a l'hypothèse de récurrence, $4^n\equiv3n+1$ mod(9).

Multiplions les deux membres par un 4, on aura $4^{n+1}\equiv12n+4$mod(9).

$\equiv3n+3+1+9n$ mod(9)

$\equiv3(n+1)+1$mod(9). C'est P_{n+1} .

d. Pour n=1, $2+3\equiv5$mod(9). Oui c'est correcte.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons P_n et montrons P_{n+1}. On a l'hypothèse de récurrence $2^n+3^n\equiv5^n$ mod(6).

Multiplions la congruence précédente par un nombre bien choisi 5, on aura

$5\times2^n+5\times3^n\equiv5^{n+1}$mod(6). On écrit autrement la congruence précédente : $3\times2^n+2^{n+1}+2\times3^n+3^{n+1}$ $\equiv5^{n+1}$mod(6).comme n>1 faisons une factorisation de$3\times2^n+2\times3^n=3\times2(2^{n-1}+3^{n-1})$ et la congruence s'écrit alors $6(2^{n-1}+3^{n-1})+2^{n+1}+3^{n+1}\equiv5^{n+1}$mod(6). D'où $6k+2^{n+1}+3^{n+1}\equiv5^{n+1}$mod(6) avec $k=2^{n-1}+3^{n-1}$. Donc $2^{n+1}+3^{n+1}\equiv5^{n+1}$mod(6). C'est évidement P_{n+1} .

Exercice 47

Soit un entier n≥4.on se propose d'étudier les solutions entières de l'équation (E) : $x^2+9=2^n$

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que a $\equiv1$ mod (2).
2. En déduire que $a^2+9\equiv2$ mod (4).
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution.

Correction:

1. Sinon, comme les restes possibles de a modulo 2 sont 0 ou 1 alors si a=2k, $k\in\mathbb{Z}$.

Donc $(2k)^2+9=2^n$, nécessairement $2^n-(2k)^2=9$ alors $4(2^{n-2}-k^2)=9$, comme $2^{n-2}-k^2\in\mathbb{Z}$

Dans ce cas 4 est alors un diviseur de 9 et cela absurde.

On conclut que a $\equiv1$mod(2).

2. Comme a=1+2k, $k\in\mathbb{Z}$ on remplace alors dans (E) , on aura $(1+2k)^2+9=2^n$ donc $1+4k+4k^2+9=2^n$ c'est-à-dire $4k^2+4k+10=2^n$ et alors on remplace 2^n par l'expression précédente qui dépend de k dans l'écriture $a^2+9=2^n$.

En conséquence $a^2+9=4k^2+4k+10$ et si on procède par congruence modulo 4 on obtient $a^2+9\equiv10$mod(4)

$\equiv2$mod(4).

3. Si (E) possède une solution entière a alors d'après ce qui précède $a^2+9\equiv2$mod(4) d'où il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $a^2+9=2+4k$ et comme a est solution de (E) alors pour un entier n≥4 on peut écrire $a^2+9=2^n$ par suite $2^n=2+4k$ et après simplification par 2 on obtient $2^{n-1}=1+2k$ et alors $2^{n-1}-2k=1$ ensuite après factorisation on a $2(2^{n-2}-k)=1$ et cela non réalisable puisque $2^{n-2}-k\in\mathbb{Z}$.

En conséquence il s'agit d'un démarrage sous une hypothèse fausse a savoir une solution entière a d'où (E) n'admet pas de solution entière.

Exercice 48

Soit un entier n impair.

On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation (E) : $x^2+9=3^n$

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que a $\equiv0$ mod (2).
2. En déduire que $a^2+9\equiv1$ mod (4).
3. Montrer que $3^n\equiv3$ mod(4).
4. Montrer que (E) n'admet pas de solution

Correction:

1. Un raisonnement analogue à l'exercice précédent par l'absurde, alors on n'a pas le choix puisque les restes possibles de a modulo 2 sont 0 ou bien 1, supposons alors que $a\equiv 1 \bmod(2)$ sig qu'il existe un entier k tel que $a=1+2k$ et si on remplace a dans l'équation (E) on aura $(1+2k)^2+9=3^n$ d'où $1+4k+4k^2+9=3^n$ ensuite $2(2k+2k^2+5)=3^n$,cela prouve que 2 divise 3^n et puisque 2 est entier naturel premier alors 2est un diviseur de 3 et cela non correcte.

En conséquence nécessairement a $\equiv 0$ mod (2).

2. D'après précédemment a $\equiv 0$ mod (2) cela sig qu'il existe un k dans $\mathbb{Z}$ tel que a=2k et on remplace ce a dans (E) on obtient $(2k)^2+9=3^n$ et alors $4k^2+9=3^n$ et maintenant on remplace 3^n par sa valeur en fonction de k dans (E) étant donné que a est solution de (E)

Par suite $a^2+9=4k^2+9$, à l'égard de la congruence modulo 4 on écrit $a^2+9\equiv 9 \bmod(4)$

$\equiv 1 \bmod(4)$.

3. D'après les donnés n est impair il existe alors p dans $\mathbb{N}$ tel que n=2p+1 alors $3^n=3^{2p+1}=3\text{x}9^p$ or $9\equiv 1 \bmod(4)$ et par suite $9^p \equiv 1 \bmod(4)$ et $3\text{x}9^p\equiv 3 \bmod(4)$ on voit alors que $3^n\equiv 3 \bmod(4)$.

4. D'autre part comme a $\equiv 0$ mod (2) alors il existe un k dans $\mathbb{Z}$ tel que a=2k on remplace ce a dans l'équation (E) on obtient $(2k)^2+9=3^n$ d'où $4k^2+9=3^n$ par suite $3^n\equiv 1 \bmod(4)$et d'après la question 3) $3^n\equiv 3 \bmod(4)$ ce résultat contredit $3^n\equiv 1 \bmod(4)$ donc l'hypothèse de l'existence d'une solution entière a de (E) est fausse.

Exercice 49

Les nombres de Fermat sont définis par $F_n=2^{2^n}+1$, $n\in\mathbb{N}$.

Fermat pensait qu'ils étaient tous premiers.

En fait les cinq premiers :$F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257$, $F_4=65537$sont premiers et le sixième F_5 ne l'est pas.

On va montrer sans calculer explicitement F_5 , que 641 divise F_5 .

1. Vérifier les égalités $641=5\text{x}2^7+1=5^4+2^4$.
2. Montrer que $5\text{x}2^7\equiv -1 \bmod(641)$ et $5^4 \text{ x } 2^{28} \equiv 1 \bmod(641)$et $5^4 \equiv -2^4 \bmod(641)$.
3. En déduire que 641 divise $2^{32}+1=F_5$.

Correction:

1. Il s'agit tout simplement d'un calcul.
2. Puisque $641=5\text{x}2^7+1$ alors $5\text{x}2^7+1\equiv 0 \bmod(641)$ et alors $5\text{x}2^7\equiv -1 \bmod(641)$.

Pour la deuxième il suffit de prendre les deux membres de la congruence précédente à la puissance 4 et on aura $(5\text{x}2^7)^4\equiv(-1)^4 \bmod 641$ d'où $5^4 \text{ x } 2^{28}\equiv 1 \bmod(641)$.

D'autre part comme $641=5^4+2^4$ donc $5^4+2^4\equiv 0 \bmod(641)$ et par suite $5^4 \equiv -2^4 \bmod(641)$.

3. $F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1$ alors d'après 2) $5^4 \equiv -2^4 \bmod(641)$, on multiplie les deux membres par2^{28} on obtient $5^4 \text{ x } 2^{28}\equiv -2^4 \text{x}2^{28} \bmod(641)$, en conséquence comme $5^4 \text{ x } 2^{28} \equiv 1 \bmod(641)$ on aura $-2^4 \text{x}2^{28}\equiv 1 \bmod(641)$ alors $2^4 \text{x}2^{28}+1\equiv 0 \bmod(641)$ et $2^{32}+1\equiv 0(641)$ ou tout simplement $F_5\equiv 0 \bmod(641)$ donc 641 diviseF_5, Fermat se trompe alors.

Exercice 50

Soit n un entier. On désigne par f(n) la somme des chiffres de n.

1. Montrer que n $\equiv$f(n) mod (9).

On pose $N=4444^{4444}$.

2. a) montrer que $4444\equiv 7 \bmod(9)$.

b) vérifier que $4443\equiv 3\text{x}1481$.

c)en déduire $4444^{4444}\equiv 7 \bmod(9)$.

d) Montrer que $f(f(N))\equiv 7 \bmod(9)$.

3. a) Vérifier que $N<(10^4)^{5\text{x}10^3}$, en déduire que $N\leq 10^{20000}$ puis que $f(N)\leq 180000$.

   b) Montrer que $f(f(N))\leq 54$.

4. Montrer que $f(f(f(N)))=7$.

Correction:

1. Donnons nous un entier n qui s'écrit $n=\overline{a_p a_{p-1} a_{p-2\ldots\ldots} a_2 a_1 a_0}=10^p a_p+10^{p-1}a_{p-1}+\ldots+10a_1+a_0$.

Sachant que ces $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.$(0\leq k\leq 9)$.

Alors $n=\sum_{k=0}^{p} 10^k a_k$ $(p\in\mathbb{N})$, et puisque $10\equiv 1 \bmod(9)$ par suite$10^k\equiv 1^k \bmod(9)$.

$\equiv 1 \bmod(9)$ pour tout $0\leq k\leq p$.

Ainsi n$\equiv \sum_{k=0}^{p} a_k$ mod(9)

$\equiv$ f(n)mod(9).

2. On pose N=4444^{4444}

a) 4444 = 4 + 4x10+ 4x100 + 4x1000

Comme 4≡4mod(9), 40≡4mod(9), 400≡40mod(9)

≡4mod(9) enfin 4000≡400mod(9)

≡40mod(9)

≡4mod(9) .faisons une somme, on obtient 4 + 4x10+ 4x100 + 4x1000 ≡ 4+4+4+4mod(9) d'où 4444≡16mod(9) et 4444≡7mod(9).

b) Un simple calcul.

c) D'abord 7^2≡4mod(9) et 7^3≡28mod(9)

≡1mod(9) et comme d'après (b) 4443≡3x1481 alors

N=4444^{4444} =$4444^{3x1481+1}$ et comme 4444≡7mod(9) on a donc N=4444^{4444} ≡7^{3x1481} x7mod(9) et comme on vient de dire que 7^3≡1mod(9), nécessairement 7^{3x1481} ≡1mod(9) et par suite

4444^{4444} ≡7mod(9).

d) D'après 1. et comme ce N et même f(N) sont deux entiers alors f(f(N))≡f(N)mod(9)

≡N mod(9)

≡7 mod(9).

3. a) 4444<10000=10^4 donc 4444^{4444} <$(10^4)^{4444}$ et puisque 4444<5000 alors

$(10^4)^{4444}$<$(10^4)^{5000}$. En conséquence N=4444^{4444}< $(10^4)^{5x10^3}$(5000=5x10^3).

Déduction : N<$(10^4)^{5x10^3}$ =10^{4x5000} =10^{20000} (inégalité stricte, erreur dans l'énoncé).

Et nécessairement N≤10^{20000} - 1 =9999……..9 (9 se répète 20.000 fois) et dans ce cas f(N) est nécessairement ≤f(9999……..9) puisque les 20000 chiffres de cet entier sont tous 9.

On conclut alors que f(N) ≤20000x9=180000.

b) f(N) est un entier composé de 6 chiffres ou peut être moins, et dans ce cas le f (f(N)) ne dépasse jamais le f de six 9 côtoyés c'est-à-dire l'entier 999999, ainsi f (f(N)) ≤f(999999).

D'où le résultat f (f(N)) ≤9x6=54.

4. D'après 2. (d) f (f(N)) ≡ 7 mod(9) il existe k∈ℤ tel que f (f(N))=7+9k et puisque on a f (f(N)) ≤54

On écrit alors 7+9k≤54 d'où k≤$\frac{54-7}{9}$ =5,2… (k∈ℤ). Ainsi :

Si k=5 alors f (f(N))=52 et f (f (f(N)))=7.

Si k=4 alors f (f(N))=43 et f (f (f (N)))=7.

Si k=3 alors f (f(N))=34 et f (f (f(N)))=7.

Si k=2 alors f (f(N))=25 et f (f (f(N)))=7.

Si k=1 alors f (f(N))= 16 et f (f (f(N)))=7.

Si k=0 alors f (f(N))=7 et f (f (f(N)))=7

Pour k<0 on aura f (f(N)) <0 ce qui n'est pas correcte, alors dans tous les cas f (f (f(N)))=7.