

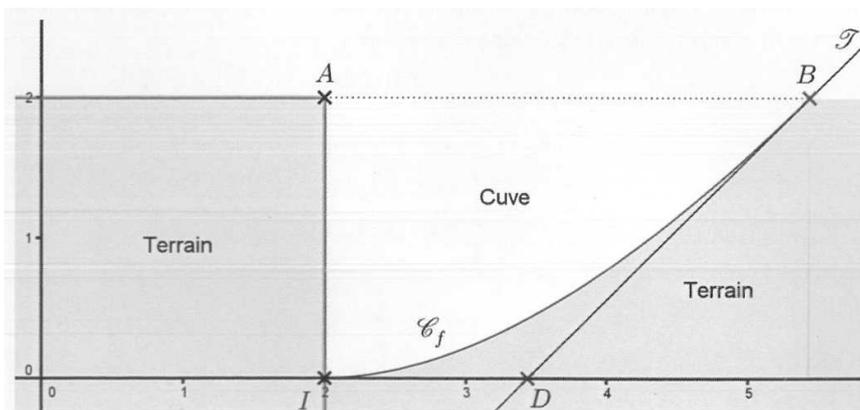
Amérique du Nord juin 2016

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant ;

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe \mathcal{C}_f ; de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe \mathcal{C}_f est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 met constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2 ; 2)$, $I(2 ; 0)$ et $B(2e ; 2)$.

Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe \mathcal{C}_f et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f au point I .
2. On note T la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B , et D le point d'intersection de la droite T avec l'axe des abscisses.
 - a. Déterminer une équation de la droite T et en déduire les coordonnées de D .
 - b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.

S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.

Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2 ; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie

par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

- b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$.
- c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

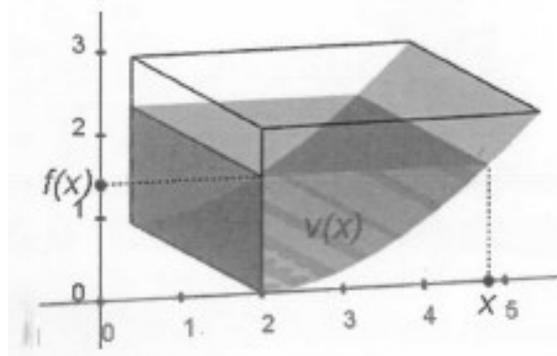
Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3 , se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 2e]$,

$$v(x) = 5 \left(\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3 \right).$$

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

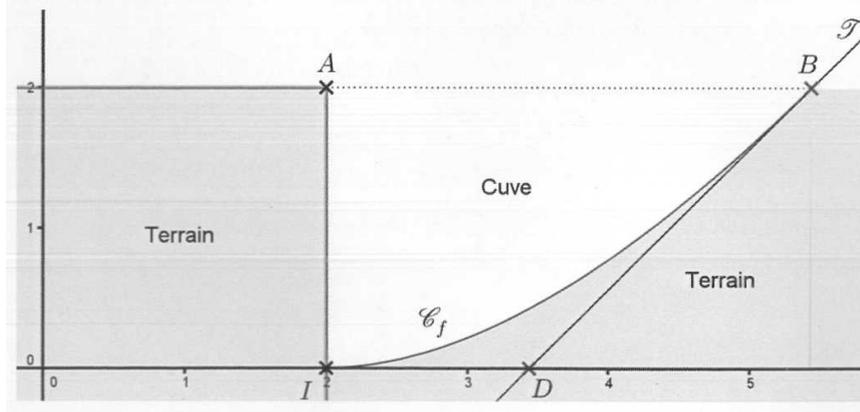
On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.



Variables :	a est un réel b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2 b prend la valeur $2e$ Tant que $u(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : c prend la valeur $(a + b)/2$ Si $v(c) < V/2$, alors : a prend la valeur c Sinon b prend la valeur c Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

CORRECTION

EXERCICE 2 (6 points) Commun à tous les candidats



Partie A

1. $f(2e) = 2e \ln e - 2e + 2$ or $\ln e = 1$ donc $f(2e) = 2$ donc $B \in \mathcal{C}_f$

$f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2$ or $\ln 1 = 0$ donc $f(2) = 0$ donc $I \in \mathcal{C}_f$

Soit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(2) = 0$ donc la tangente en I à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses et passe par I, or I est un point de l'axe des abscisses donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f au point I.

2. a. Une équation de la droite T est $y = f'(2e)(x - 2e) + 2$ or $f'(2e) = 1$

Une équation de la droite T est $y = x - 2e + 2$

$y_D = 0$ donc $0 = x_D - 2e + 2$ donc $x_D = 2e - 2$

b. L'aire du triangle ABI est égale à $\frac{1}{2} AB \times AI = \frac{1}{2} (x_B - x_A) \times y_A = \frac{1}{2} (2e - 2) \times 2 = 2e - 2$

L'aire du trapèze AIDB est égale à $\frac{1}{2} (ID + AB) \times AI = \frac{1}{2} (2e - 2 - 2 + 2e - 2) \times 2$ soit $4e - 6$

$2e - 2 \leq S \leq 4e - 6$ soit approximativement entre 3,436 et 4,874

3. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2 ; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

oit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} & v'(x) = x \end{cases}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{4}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$ donc G est une primitive de

la fonction g

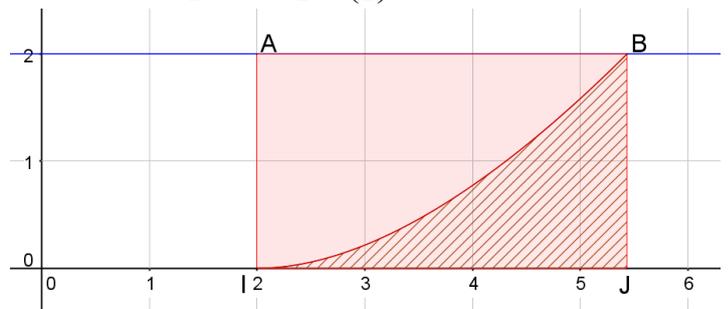
b. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$ est $F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$

c. $\int_2^{2e} f(x) dx = F(2e) - F(2)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 2$ et $x = 2e$ et la courbe \mathcal{C}_f

$F(2e) = 2e^2 \ln e - 3e^2 + 4e = 2e^2 - 3e^2 + 4e$ donc

$F(2e) = 4e - e^2$

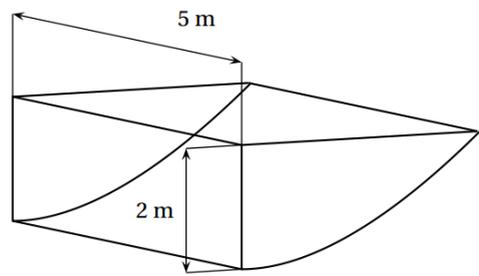
$F(2) = 2 \ln 1 - 3 + 4 = 1$ donc $\int_2^{2e} f(x) dx = 4e - e^2 - 1$



S est l'aire du carré AIJB - l'aire calculée précédemment

soit $S = (2e - 2) \times 2 - (4e - e^2 - 1)$ donc $S = e^2 - 3$.

$V = S \times 5 = 5 e^2 - 15$ unités de volume soit $21,95 m^3$ soit $22 m^3$ à l'unité près.



Partie B

1. D'après la question a.1. pour tout $x \in [2 ; 2e]$; $f'(x) = \ln \frac{x}{2}$

Or $2 \leq x \leq 2e \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{2} \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln \frac{x}{2} \leq \ln e \Leftrightarrow 0 \leq f'(x) \leq 1$

f' est strictement positive sur $]2 ; 2e[$ et la fonction f strictement croissante sur cet intervalle.

la fonction f est continue strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 2e]$; $f(2) = 0$ et $f(2e) = 2$ donc l'image par f de l'intervalle $[2 ; 2e]$ est $[0 ; 2]$

$1 \in [0 ; 2]$ donc, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2 ; 2e]$.

$f(4,31) \approx 0,999 < 1$ et $f(4,32) \approx 1,0069 > 1$, donc $4,31 < \alpha < 4,32$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4,32$ alors $v(\alpha) \approx 7,528 m^3$ soit $8 m^3$ au m^3 près.

2. Cet algorithme permet par approximations successives de déterminer la hauteur d'eau dans la cuve lorsqu'elle est à moitié pleine.