Métropole & La Réunion septembre 2008

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, *m*), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3. L'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB$ est :

a. la médiatrice de [AC]. **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI]. **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points *M* du plan tels que : $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) . (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$ est :

a. la médiatrice de [AC]. **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI]. **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$

soit $-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ donc C est le barycentre des points pondérés (A, – 1), (B, 1) et (D, 1)

Réponse *c* VRAIE.

2. *a.* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}$ donc C est l'image de B par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **FAUX**

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

I est le milieu de [AC] et J est le milieu de [AI] donc $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ donc le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{3}{2}$. **FAUX**

c. I est le milieu des diagonales (BD] et [AC] donc par la symétrie de centre I, A est transformé en C, D en B et B en D donc le triangle DAB est transformé en le triangle DCB. **FAUX**

d. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DI})$ or I est le milieu de [BD] donc $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IJ}$ donc J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ **VRAI**

3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ donc $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB \Leftrightarrow 2\,MI = AB \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$

M décrit le cercle de centre I de rayon $\frac{1}{2}AB$ soit le cercle inscrit dans le carré ABCD. **Réponse *d* VRAIE.**

4. I est le milieu de [BD] donc $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$ donc $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI}$

J est le milieu de [AI] donc $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = 4\overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$ donc : $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) . (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ} . \overrightarrow{CA} = 0$

$\Leftrightarrow$ M décrit la droite perpendiculaire en J à (AC) soit la médiatrice de [AI]. **Réponse *c* VRAIE.**