Soit la fonction f définie sur [0 ; 1 [$\cup$] 1 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$.

1. Etudier la fonction f . Préciser son (ses) asymptote(*s*).

Soit A le point de la courbe de f d'abscisse 0 et B le point de la courbe de f d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer une équation de la tangente T au point A.
3. Déterminer une équation de la droite (AB). Préciser la position relative de la courbe C_f et de la droite (AB).
4. Soit I = $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Montrer que pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$, $1 \le f(x) \le 2\sqrt{e}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{2} \le I \le \sqrt{e}$

c. Montrer que pour tout x de [0 ; 1 [: $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1 - x}$

d. En déduire que I = $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

e. Déduire de 4. *b*. un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x$ puis un encadrement de I.

CORRECTION

1. f est définie continue dérivable sur [0 ; 1 [$\cup$] 1 ; + ∞ [.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x} - 1}$ or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) \ -\infty$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 1 - x = 0^-$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{1 - x} = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 - x = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{1 - x} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f

Soit $\begin{cases} u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ v(x) = 1 - x & v'(x) = -1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{e^x (1 - x) - (-1)\, e^x}{(1 - x)^2} = \dfrac{e^x (2 - x)}{(1 - x)^2}$

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	–	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-e^2$	↘	$-\infty$

2. A est le point de la courbe de f d'abscisse 0 donc a pour coordonnées (0 ; f (0)) soit (0 ; 1)

La tangente en A à C_f est la droite d'équation $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$ soit $y = 2x + 1$

3. B est le point de la courbe de f d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ donc a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{2} ; 2\sqrt{e}\right)$

La droite (AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2\sqrt{e} - 1$

La droite (AB) *a* donc une équation de la forme $y = (2\sqrt{e} - 1)\,x + b$

Cette droite passe par A donc $y_A = (2\sqrt{e} - 1)\,x_A + b$ donc $1 = b$

La droite (AB) a pour équation $y = (2\sqrt{e} - 1)\,x + 1$.

4. *a.* La fonction f est croissante sur $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, donc pour tout x de $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ soit $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

b. Pour tout x de $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{\mathrm{e}}$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}}\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{e}}$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{I} \leq \sqrt{\mathrm{e}}$

c. Pour tout x de $[\,0\,;1\,[$: $1 + x + \dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \dfrac{1-x^2+x^2}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$

d. Pour tout x de $[\,0\,;1\,[$: $(1+x)\,\mathrm{e}^x + \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1-x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ soit $f(x) = (\,1 + \,)\,\mathrm{e}^x + x^2 f(x)$

donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{I} = \Big[\,x + x^2\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{I} = \dfrac{5}{4} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x$

Pour tout x de $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{\mathrm{e}}$ donc $x^2 \leq x^2 f(x) \leq 2\sqrt{\mathrm{e}}\,x^2$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\mathrm{e}}\,x^2\,\mathrm{d}x$

soit $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{\mathrm{e}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$ donc $\dfrac{1}{24} \leq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{12}$

$\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{24} \leq \dfrac{5}{4} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{12}$ soit $\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{24} \leq \mathrm{I} \leq \dfrac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{12}$