ENONCE

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[1\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Pour tout réel $\alpha \geq 1$, on considère les intégrales :

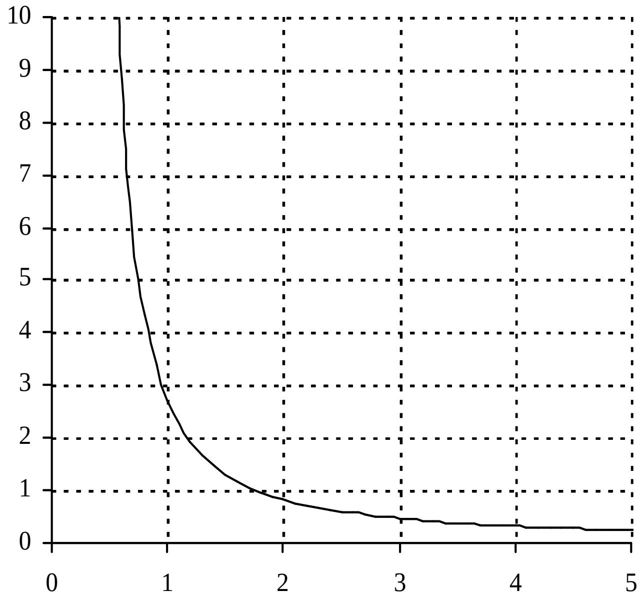
$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{et} \quad K(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale K (α).

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Étudier le sens de variation de f.

La courbe de f est donnée ci-dessous.



2. *a*. Interpréter géométriquement le nombre K(α). Représenter sur la figure donnée en annexe K(α)

b. Soit $\alpha \geq 1$, montrer que :

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

c. En déduire que $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.

3. *a*. Calculer J(α).

b. Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$:

$$\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2).$$

CORRECTION

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

C admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$

1. b. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\times\frac{-1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = -\frac{x+1}{x^3}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ donc pour tout $x \geq 1$, $f'(x) < 0$

f est strictement décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

2. a. f est positive sur $[1\ ;+\infty[$, $2\alpha \geq \alpha$ $(\alpha \geq 1)$ donc K(α) est l'aire du domaine plan limité par les droites $x = \alpha$, $x = 2\alpha$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

2. b. f est décroissante sur $[1\ ;+\infty[$

$\alpha \geq 1$ donc sur $[\alpha\ ;2\alpha]$: $\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

ces fonctions étant continues sur $[1\ ;+\infty[$

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)dx \leq K(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx$$

donc $\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\alpha}^{2\alpha}dx \leq K(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\alpha}^{2\alpha}dx$

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

2. c. $\alpha \geq 1$ donc $0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1$ donc $1 < \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq e$

donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq e$

soit $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.

3. a. $J(\alpha) = \ln(2\alpha) - \ln(\alpha) = \ln 2$

3. b. si $\alpha \leq x \leq 2\alpha$ alors $\frac{1}{2\alpha} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha}$

donc $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq \exp\frac{1}{x} \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

donc $\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq \frac{1}{x}\exp\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

ces fonctions étant continues sur $[1\ ;+\infty[$

$\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)J(\alpha) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)J(\alpha)$

donc $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2)$.