Nouvelle Calédonie Mars 2016

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. *a*. Vérifier que : $\left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

1. *b*. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. *a*. Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$

2. *b*. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

3. *a*. Interpréter géométriquement d_n.

3. *b*. Calculer d_0.

3. *c*. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$

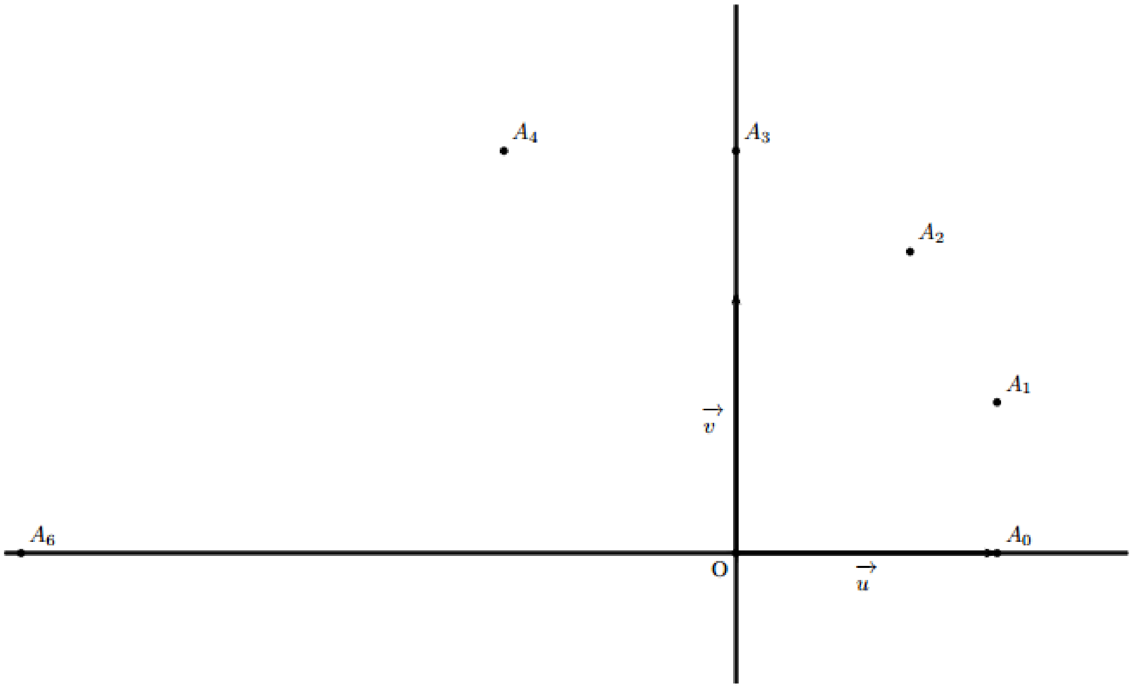
3. *d*. En déduire que la suite $(d_n)_{n>0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n, $d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

4. *a*. Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

4. *b*. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $O A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n.

4. *c*. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

4. *d*. Justifier cette construction.



CORRECTION

1. *a.* $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1. *b.* $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,z_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

2. *a.* Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

Initialisation : si $n = 0$ alors $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 = z_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$ alors $z_{n+1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{6}}$.

$z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,z_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

$z_{n+1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $z_{n+1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{6}}$. La propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

2. *b.* Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si le point A_n est sur l'axe des réels, soit si $\arg z_n = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) or un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$

Il faut et il suffit donc que $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi$ donc que $n = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

3. *a.* d_n est la distance $A_{n+1}A_n$

3. *b.* $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 - z_0\right| = \left|\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. *c.* Pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$

3. *d.* $d_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$ et $d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n|$

$1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\left|1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ donc $d_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,d_n$

La suite $(d_n)_{n>0}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc pour tout entier naturel n, $d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

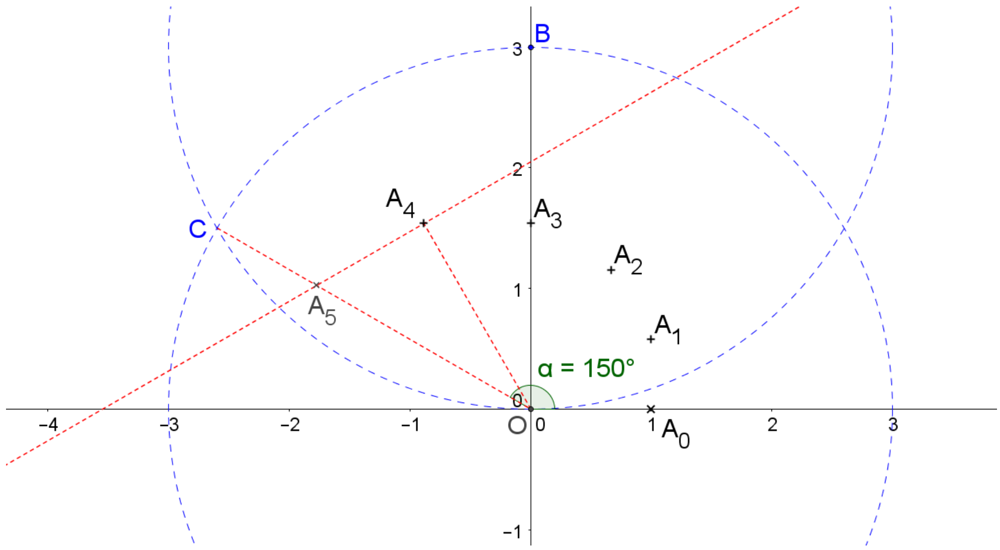
4. *a.* $z_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$ donc $|z_{n+1}| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ et $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}$ soit $|z_{n+1}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}$ et $|z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$d_n^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ donc $|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ or $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2} = \frac{4}{3}$

donc $|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}$ soit pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

4. *b.* $OA_n = |z_n|$ et $OA_{n+1} = |z_{n+1}|$ donc $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_n A_{n+1}^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, pour tout entier naturel n, le triangle $O A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n.

4. *c.*



4. *d.* Le triangle $OA_4 A_5$ est rectangle en A_4 donc A_5 appartient à la droite Δ perpendiculaire en A_4 à la droite (OA_4)

un argument de z_5 est $\frac{5\pi}{6}$ donc il suffit de représenter un angle $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_5})$ de mesure $\frac{5\pi}{6}$ pour cela il suffit de tracer un cercle de centre O de rayon quelconque qui coupe l'axe des imaginaires en B puis de tracer le cercle de centre B passant par O qui recoupe le premier cercle en deux points, l'un d'eux est C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{3}$ donc tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}$, alors

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

A_5 est l'intersection de la droite Δ et du segment [OC].