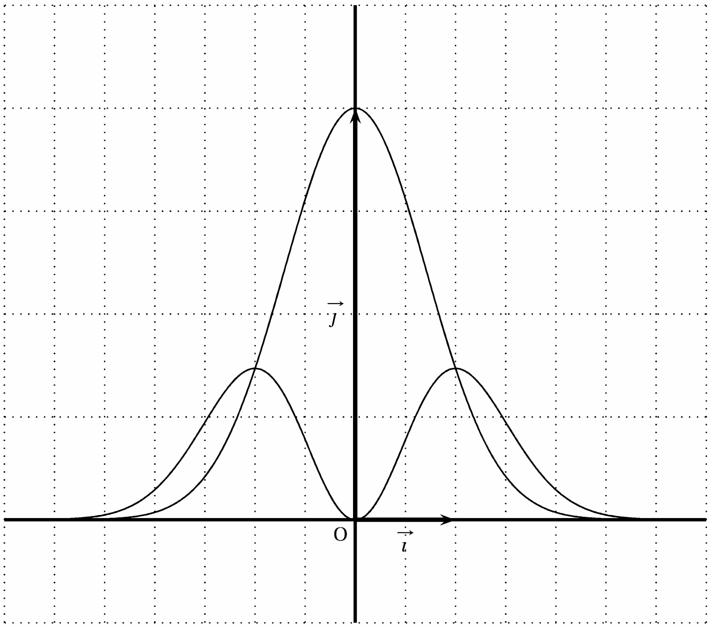
AMERIQUE DU SUD NOVEMBRE 2005 partiel

On pourra utiliser sans justification que pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} = 0$



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par ;

$$f(x) = e^{-x^2} \text{ et } g(x) = x^2 \, e^{-x^2}.$$

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent ci-contre. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier C_f et C_g sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g . Que peut-on en déduire ?
3. Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de C_f et C_g.

CORRECTION

1. On a $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$, ce qui permet de distinguer C_f et C_g

2. $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$; f étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.

$g(-x) = (-x)^2 \, e^{-(-x)^2} = x^2 \, e^{-x^2} = g(x)$; pour les mêmes raisons la fonction g est paire.

Les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit d'étudier f et g sur $[0 ; +\infty[$.

3. <u>Dérivée :</u>

$f'(x) = -2x \, e^{-x^2}$ qui est signe de $-x$: donc f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$g'(x) = (2x - 2x^3) \, e^{-x^2} = 2x \, e^{-x^2} (1 - x^2)$, qui est du signe de $x(1 - x^2)$

<u>Limite</u>

En posant $x^2 = X$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $f(x) = e^{-X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

De même pour g , $g(x) = x^2 \, e^{-x^2} = X \, e^{-X}$ or d'après la propriété admise $\lim\limits_{X \to +\infty} X \, e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

La limite est identique au voisinage de $-\infty$.

On obtient les tableaux de variations suivants :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
f	1 ↘	0

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	↗	e^{-1}	↘	0	↗	e^{-1}	↘	0

4. Soit $d(x) = f(x) - g(x) = (1 - x^2) \, e^{-x^2}$ qui est du signe de $1 - x^2$, donc positive sur $[-1 ; 1]$, négative ailleurs.

Sur $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq g(x)$, donc C_f est au dessus de C_g

Sur $]-\infty ; -1$, $f(x) \leq g(x)$, $[C_f$ est au-dessous de C_g .