NOUVELLE CALEDONIE NOVEMBRE 2007

Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$ est :

a. 3	*b.* i	*c.* 3 + i

2. Soit z un nombre complexe, $|z + \mathrm{i}|$ est égal à :

a. $\lvert z \rvert + 1$	*b.* $\lvert z - \mathrm{i} \rvert$	*c.* $\lvert \mathrm{i}\overline{z} + 1 \rvert$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$	*b.* $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$	*c.* $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a. $n = 3$	*b.* $n = 6k + 3$	*c.* $n = 6k$ avec k entier relatif.

5. Soit A et B deux points d'affixes respectives i et – 1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est :

a. La droite (AB)	*b.* Le cercle de diamètre [AB]	*c.* La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6. Soit Ω le point d'affixe 1 – i. L'ensemble des point M d'affixes $z = x + \mathrm{i}y$ vérifiant $|z - 1 + \mathrm{i}| = |3 - 4\mathrm{i}|$ a pour équation :

a. $y = -x + 1$	*b.* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$	*c.* $z = 1 - \mathrm{i} + 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3 i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ est :

a. $1 - 4\mathrm{i}$	*b.* $-3\mathrm{i}$	*c.* $7 + 4\mathrm{i}$

8. L'ensemble des solutions dans C de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$ est :

a. { 1 – i }	*b.* L'ensemble vide	*c.* { 1 − i ; 1 + i }

Exercice 2 5 points Commun à tous les candidats

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :
– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. *a.* Dessiner un arbre pondéré.
b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.
Pour les questions suivantes, on prendra λ = 0,225.
b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice 3 6 points Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[\alpha\,;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :

On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ……

2. Démontrer le théorème des gendarmes.

Soient f, g h trois fonctions définies sur $[\alpha\,;+\infty[$. et L un nombre réel.

Si g et h ont pour limite commune L quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)$ est égale à L.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x} - x - 1$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C).

1. Soit a un nombre réel. Ecrire en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) en un point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction à effectuer sur la feuille annexe de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5.

On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \qquad\qquad (2) \quad e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier non nul n : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \leq e$
4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier non nul n : $e \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
5. En déduire des question précédentes un encadrement de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ puis sa limite en $+\infty$.

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. *a*. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}\,;\dfrac{18}{49}\,;\dfrac{12}{49}\right)$.

3. *a*. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a*. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

***b*.** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5 ? Justifier.

***c*.** En déduire que $6^{40} \equiv 1\ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1\ [5]$.

***d*.** Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

***a*.** Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

***b*.** Montrer que l'équation (E′) $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

***c*.** Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E′).

***d*.** Résoudre l'équation (E′).

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1\ [40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b\ [55]$ et si $a^{40} \equiv 1\ [55]$, alors $b^{33} \equiv a\ [55]$.

CORRECTION

Exercice 1

1. $2 \times 3 + 3 = 9$ donc une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$ est 3.

2. $\mathrm{i}\,\overline{z} + 1 = \mathrm{i}\,\overline{z} - (-1) = \mathrm{i}\,\overline{z} - \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}\,(\overline{z} - \mathrm{i})$ or le conjugué de $z + \mathrm{i}$ est $\overline{z} - \mathrm{i}$ donc $|z + \mathrm{i}| = |\overline{z} - \mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,(\overline{z} - \mathrm{i})| = |\mathrm{i}\,\overline{z} + 1|$

3. $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$ donc un argument de $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$, un argument de z est θ

$\arg\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}} = \arg -1+\mathrm{i}\sqrt{3} - \arg\overline{z}$ soit $\arg\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}} = \arg -1+\mathrm{i}\sqrt{3} + \arg z$ donc $\arg\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}} = \dfrac{2\pi}{3} + \theta$

4. $\arg(\sqrt{3} + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6}$ donc $\arg(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n = n\dfrac{\pi}{6}$.

Le complexe $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier relatif $\Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier relatif

$\Leftrightarrow n = 3 + 6k$ avec k entier relatif.

5. $|z - \mathrm{i}| = |z + 1| \Leftrightarrow$ MA = MB donc L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est la médiatrice de [AB], OA = OB = 1 donc O appartient à la la médiatrice de [AB], l'ensemble cherché est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6. $|z - 1 + \mathrm{i}| = |3 - 4\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z - (1 - \mathrm{i})| = |3 - 4\mathrm{i}| = 5 \Leftrightarrow \Omega M = 5$
L'ensemble des point M d'affixes $z = x + \mathrm{i}\,y$ vérifiant $|z - 1 + \mathrm{i}| = |3 - 4\mathrm{i}|$ est le cercle de centre $1 - \mathrm{i}$ de rayon 5 donc est l'ensemble des point M d'affixes z tel que $z = 1 - \mathrm{i} + 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel.

7. le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc C est l'image de B dans la rotation de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc

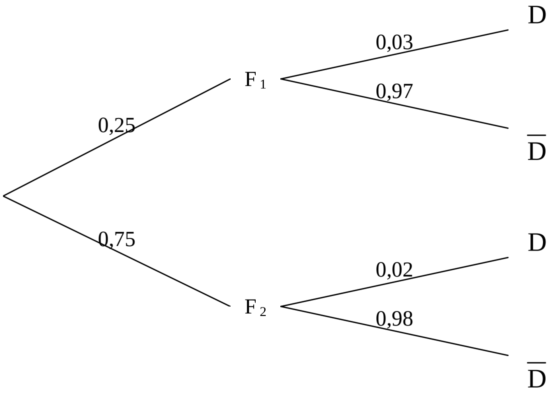
$c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(b - a)$ soit $c = \mathrm{i}\,(b - a) + a$ donc $c = -3 - 4\mathrm{i} + 4 = 1 - 4\mathrm{i}$

L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ est $1 - 4\mathrm{i}$

8. $\dfrac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z - 2 = z\,(z - 1)$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = \mathrm{i}^2$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z = 1 - \mathrm{i}$ ou $z = 1 + \mathrm{i}$

L'ensemble des solutions dans C de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$ est $\{ 1 - \mathrm{i} \,;\, 1 + \mathrm{i} \}$

Exercice 2



1. *b.* $p\,(D \cap F_1) = 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}0075$

$p\,(D \cap F_2) = 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}0150$ donc $p(D) = p\,(D \cap F_1) + p\,(D \cap F_2)$
$p(D) = 0{,}0075 + 0{,}0150 = 0{,}0225$

1. *c.* $p_D(F_1) = \dfrac{p\,(D \cap F_1)}{p\,(D)} = \dfrac{0{,}0075}{0{,}02253} = \dfrac{1}{3}$

2. On a une succession de 20 tirages identiques et indépendants, chaque tirage a deux issues :
le composant est défectueux ($p = 0{,}0225$)
le composant n'est pas défectueux ($q = 0{,}9775$)
donc la variable aléatoire comptant le nombre de composants est défectueux suit une loi binomiale de paramètres (20 ; 0 ;0225).

$p(X = k) = \binom{20}{k} \times 0{,}0225^{\,k} \times 0{,}9775^{\,n-k}$.

$p(X \geq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] \approx 0{,}074$.

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif donc $p(X > k) = e^{-\lambda k}$

a. $p(X > 5) = 0{,}325 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0{,}325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0{,}325 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}325}{5}$ soit $\lambda \approx 0{,}225$.

b. $p(X \leq 8) = 1 - e^{-\lambda k} = 1 - e^{-1{,}8}$ soit $p(X \leq 8) \approx 0{,}835$.
$p(X > 8) = 1 - p(X \leq 8) = 1 - 0{,}835 = 0{,}165$.

c. On a une loi de durée de vie sans vieillissement donc la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il *a* déjà duré plus de 3 ans est aussi la probabilité qu'un composant dure plus de 5 ans soit 0,325.

Exercice 3

Partie A : question de cours

1. f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert I de centre $\ell > 0$, il existe un réel α tel que si $x > \alpha$ alors $f(x) \in$ I.

2. Soit I un intervalle ouvert quelconque de centre ℓ (I est de la forme $]\ \ell - h\ ;\ \ell + h\ [$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ donc il existe un réel α_1 tel que si $x > \alpha_1$ alors $g(x) \in$ I

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ donc il existe un réel α_2 tel que si $x > \alpha_2$ alors $h(x) \in$ I

Soit α le plus grand des deux nombres α_1 et α_2.
$x > \alpha$ donc $x > \alpha_1$ donc $g(x) \in$ I
$x > \alpha$ donc $x > \alpha_2$ donc $h(x) \in$ I
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ donc comme $g(x) \in$ I et $h(x) \in$ I alors $f(x) \in$ I donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Partie B

1. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est une droite de coefficient directeur $f'(a) = e^{a} - 1$ donc d'équation $y = (e^{a} - 1)\,x + p$
Cette droite passe par le point de (C) d'abscisse a donc de coordonnées $(a\ ;\ e^{a} - a - 1)$ donc $e^{a} - a - 1 = a\,(e^{a} - 1) + p$
donc $p = e^{a} - a - 1 - a\,e^{a} + a$ soit $p = e^{a} - a\,e^{a} - 1$

La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = (e^{a} - 1)\,x + e^{a} - a\,e^{a} - 1$

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b.
N appartient à (T) donc $y_N = (e^{a} - 1)\,b + e^{a} - a\,e^{a} - 1$de plus N appartient à (D) donc $y_N = -b - 1$
donc $(e^{a} - 1)\,b + e^{a} - a\,e^{a} - 1 = -b - 1$ donc en isolant b :
$b\,(e^{a} - 1) + b = a\,e^{a} - e^{a}$
soit $b\,e^{a} = (a - 1)\,e^{a}$ or la fonction exponentielle est strictement positive donc $e^{a} \neq 0$ donc $b = a - 1$ soit $b - a = -1$
donc N a pour coordonnées $(a - 1\ ;\ -a)$ donc N est le point de D d'abscisse $a - 1$

3. Pour tracer la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5, il suffit de placer le point M sur (C) et de placer le point N d'abscisse 1,5 – 1 soit 0,5 sur (D) puis de tracer la droite (MN)

Partie C

1. Graphiquement $f(x) \geq 0$

2. Pour tout réel x , $f(x) \geq 0$ donc en particulier pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$ soit $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$

Pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{-1}{n+1}\right) \geq 0$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} - \frac{-1}{n+1} - 1 \geq 0$ soit $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$

3. $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ donc $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ donc pour tout entier naturel non nul n : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$

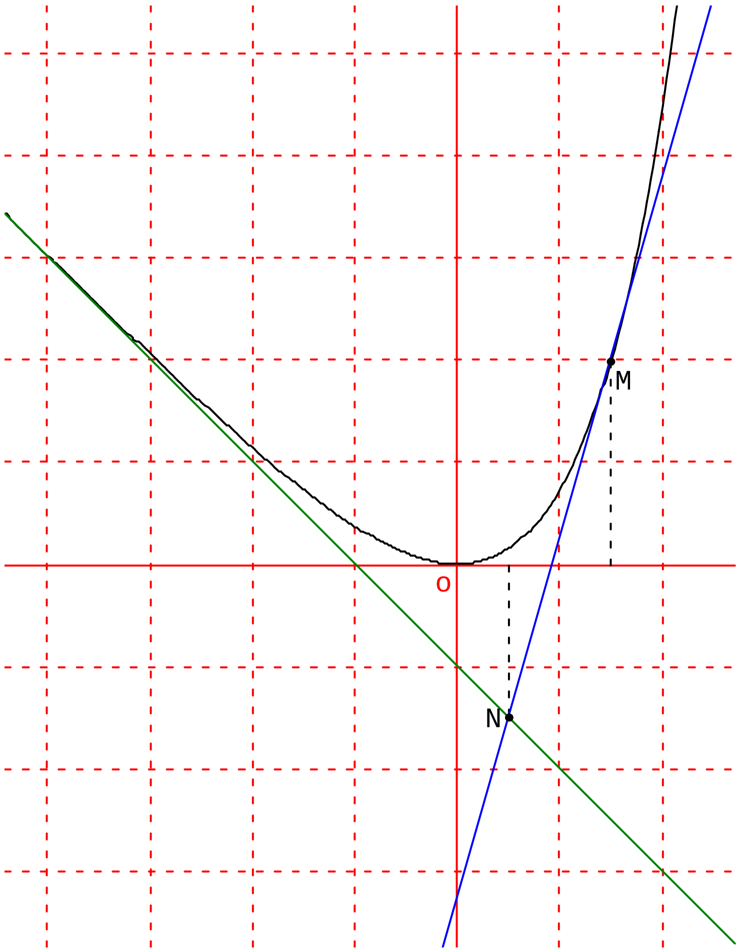
4. *a.* $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ or $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} > 0$

soit en passant aux inverses $0 < e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$

donc $\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

5. Pour tout entier naturel non nul n : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc $e\,\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e\,\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} = e$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$


M
O
N

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a*. La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc à toute droite de ce plan en particulier à (BC).
Les triangles OAB et OCA sont rectangles en O donc la droite (OA) est orthogonale aux droites (OB) et (OC). Ces droites sont sécantes en O donc la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC) à toute droite de ce plan en particulier à (BC).

b. La droite (BC) est orthogonale aux droites sécantes (OH) et (OA) donc au plan (OAH) à toute droite de ce plan en particulier à (AH).
les droites (BH) et (AC) sont orthogonales.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
Les droites (AH) et (BC) sont orthogonales donc la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
Les droites (BH) et (AC) sont orthogonales donc la droite (BH) est la hauteur issue de B du triangle ABC.
H est l'intersection de deux hauteurs (AH) et (BH) donc est l'orthocentre du triangle ABC.

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $a\,x + b\,y + c\,z = d$
A $\in$ (ABC) donc $a = d$
B $\in$ (ABC) donc $2\,b = d$
C $\in$ (ABC) donc $3\,c = d$, en choisissant $d = 6$ alors $a = 6$, $b = 3$ et $c = 2$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est $6\,x + 3\,y + 2\,z = 6$

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).
Un vecteur normal du plan (ABC) est le vecteur de coordonnées (6 ; 3 ; 2) qui est aussi un vecteur directeur de (D) donc une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC) est $\begin{cases} x = 6\,t \\ y = 3\,t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. H appartient à (D) donc a des coordonnées de la forme $(6\,t\,;\,3\,t\,;\,2\,t)$
H $\in$ (ABC) donc $36\,t + 9\,t + 4\,t = 6$ soit $t = \dfrac{6}{49}$ donc le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}\,;\dfrac{18}{49}\,;\dfrac{12}{49}\right)$.

3. *a*. La distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{|6\,x_O + 3\,y_O + 2\,z_O - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{7}$ donc OH = $\dfrac{6}{7}$

b. L'aire du triangle OAB est $\dfrac{1}{2} \times 1 \times 2$ soit 1
Le volume du tétraèdre OABC est égal à $\dfrac{1}{3} \times \text{OC} \times \text{Aire de OAB} = \dfrac{1}{3} \times 3 \times 1$ donc V = 1 unités de volume
V = $\dfrac{1}{3} \times \text{OH} \times \text{Aire de ABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{7} \times \text{Aire de ABC}$ donc $\dfrac{2}{7} \times \text{Aire de ABC} = 1$ soit l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{7}{2}$.

c. L'aire du triangle OAB est 1 *u.a*. L'aire du triangle OAC est $\dfrac{3}{2}$ *u.a*. L'aire du triangle OBC est 3 *u.a*.
$1^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = 10 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{49}{4} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^2$ donc le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.*

$6^2 = 36 = 3 \times 11 + 3$ donc $6^2 \equiv 3$ [11]

$6^3 \equiv 3 \times 6$ [11] donc $6^3 \equiv 7$ [11]

$6^4 \equiv 6 \times 7$ [11] donc $6^4 \equiv 9$ [11]

$6^5 \equiv 6 \times 9$ [11] donc $6^5 \equiv -1$ [11]

$6^{10} = (6^5)^2$ donc $6^{10} \equiv (-1)^2$ [11] donc $6^{10} \equiv 1$ [11]

Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est 1.

1. *b.* $6^2 = 36 = 7 \times 5 + 1$ donc $6^2 \equiv 1$ [5] or $6^4 = (6^2)^2$ donc $6^4 \equiv 1$ [5]
Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

1. *c.* $6^{10} \equiv 1$ [11] or $(6^{10})^4 = 6^{40}$ donc $6^{40} \equiv 1$ [11]
de même $6^4 \equiv 1$ [5] or $(6^4)^{10} = 6^{40}$ donc $6^{40} \equiv 1$ [5]

1. *d.* 11 et 5 divisent $6^{40} - 1$ or 11 et 5 sont premiers entre eux donc 11×5 divise $6^{40} - 1$
$6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. *a.* 5 divise 65 et 40 donc 65 et 40 ne sont pas premiers entre eux donc l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution d'après le théorème de Bézout.

2. *b.* 17 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation (E′) $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

2. *c.*

	u	v	$17u - 40v$	Quotient
	0	1	– 40	
	1	0	17	– 3
$L_3 = L_1 + 3L_2$	3	1	11	1
$L_4 = L_2 - L_3$	– 2	– 1	6	1
$L_5 = L_3 - L_4$	5	2	5	1
$L_6 = L_4 - L_5$	– 7	– 3	1	5
$L_7 = L_5 - 5L_6$	40	17	0	

donc $17 \times (-7) + 40 \times 3 = 1$ donc le couple $(-7 ; -3)$ est solution de $17x - 40y = 1$

2. *d.* $\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :
$17(x + 7) - 40(y + 3) = 0$
soit $17(x + 7) = 40(y + 3)$ donc 17 divise $40(y + 3)$ or 17 et 40 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise $y + 3$. Il existe un entier relatif k tel que $y + 3 = 17k$ donc en remplaçant dans $17(x + 7) = 40(y + 3)$, $x + 7 = 40k$
donc $y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$
Vérification :
s'il existe un entier relatif k tel que $y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ alors $17x - 40y = 17 \times 40k - 7 \times 17 - 40 \times 17k + 3 \times 40 = 1$

donc les solutions de (E') sont les couples $(40k - 7 ; 17k - 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $17x \equiv 1$ [40], il existe un entier relatif y tel que $17x = 1 + 40y$ donc x est solution de (E') donc il existe un entier relatif k tel que : $x = 40k - 7$

$0 \leq x \leq 40 \Leftrightarrow 0 \leq 40k - 7 \leq 40 \Leftrightarrow \frac{7}{40} \leq k \leq \frac{47}{40} \Leftrightarrow k = 1$

Il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1$ [40] : $x_0 = 40 - 7 = 33$

3. Si $a^{17} \equiv b$ [55] alors 55 divise $a^{17} - b$ et si $a^{40} \equiv 1$ [55] alors 55 divise $a^{40} - 1$
or $17 \times 33 - 40 \times 14 = 1$ donc $a^{17 \times 33} = b^{33}$ [55] donc $a^{1 + 40 \times 14} \equiv b^{33}$ [55]
or $a^{1 + 40 \times 14} = a^1 \times a^{40 \times 14} = a \times (a^{40})^{14}$ et $a^{40} \equiv 1$ [55], donc $a^{40 \times 33} \equiv 1$ [55] donc $a^{1 + 40 \times 14} \equiv a$ [55] donc $b^{33} \equiv a$ [55].