

الاشتقاق

الثانية سلك بكالوريا علوم تحريسة

I- الاشتقاق في نقطة- الدالة المشتقة

(A) أنشطة

نشاط 1

باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأضلاع x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x) = x^2 - 2x$ $x_0 = 1$ - ب- $f(x) = x^2 - 4$ $x_0 = 2$

ج- $x_0 = 0$ $\begin{cases} f(x) = \sin x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - 2x & x > 0 \end{cases}$

نشاط 2

حدد الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f' في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ - ب- $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$

ج- $f(x) = \sin 2x \cos x$ - د- $f(x) = 1 + \tan^2 x$ - س- $f(x) = x^2 - x$

نشاط 3

حدد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \cos \pi x}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

(B) تذكير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها

ب $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق ل f في x_0 . نكتب $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2- الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليمين في

x_0 ونرمز لها ب $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليسار في

x_0 نرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ب - خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

3- التاويل الهندسى - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحنىها قابلة اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأضول x_0 معادلته

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأضول x_0 معامله الموجه $f'_a(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)

ج- نصف مماس مواز لمحور الأرتاب

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فإن لـ C_f نصف مماس مواز لمحور الأرتاب.

4- الدالة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I . الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرملها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}^*$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

II- مشتقة دالة مركبة - مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \cos(x^3 - 4x^2) \quad (a)$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I إذا كان x_0 عنصراً من I وكانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة f^{-1} للاشتقاق في

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{و} \quad f(x_0)$$

خاصية

لتكن f دالة رتبية قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

* ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ولدينا $(\sqrt[n]{x})' = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

* ليكن r من \mathbb{Q}^* . الدالة $x \rightarrow x^r$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ولدينا $(x^r)' = r x^{r-1}$

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $n \in \mathbb{N}^*$ فإن الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I .

$$\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{f(x)} \right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x)$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $r \in \mathbb{Q}$.

$$\forall x \in I \quad \left((f(x))^r \right)' = r (f(x))^{r-1} \cdot f'(x)$$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{5}} - 3 \quad f(x) = \sqrt[3]{x-3}^2 - 2 \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} - 1$$

$$f(x) = -2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{2}} - 5 \quad f(x) = \left((x^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{5}} - 4$$

ب- مشتقة الدوال العكسية للدوال المثلثية

الدالة \arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ نحو \mathbb{R} بـ $f(x) = \tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ فإن الدالة \arctan قابلة

$$\text{للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \arctan' x = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

خاصية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{و} \quad \arctan \text{ الدالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فان الدالة $\arctan \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \quad (\arctan \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2} \text{ و}$$

تمرين أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالات

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x} \quad f(x) = \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

تمرين حدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{x}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$\{x \in D_u, / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{n} x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
\mathbb{R}	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x$
D_u	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$	$\arctan(u(x))$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان $F'(x) = f(x)$

أمثلة الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$ على \mathbb{R}

الدالة $F : x \rightarrow \cos x + 3$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow -\sin x$ على \mathbb{R}

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I
مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أمثلة - الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$ على \mathbb{R}

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على \mathbb{R} بـ $F_\lambda(x) = x^2 + 2x + \lambda$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من \mathbb{R}
توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0) = y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} حيث $f(x) = x^3 - 2x + 3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن

$$* F + G \text{ دالة أصلية لـ } f + g$$

$$* \lambda F \text{ دالة أصلية لـ } \lambda f$$

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$$

بين أن f تقبل دالة أصلية على \mathbb{R} و حدد الدوال الأصلية لـ f .

تمارين

1- حدد دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - 1$

(لاحظ أن $f(x) = \alpha u'(x)(u(x))^n$ حيث α و n معلومين)

2- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \frac{3}{4x^2 + 4x + 2}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x) = \alpha \frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$)

3- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \cos^3 x$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$)

تمرين 1

A - أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 4} \quad -4 \quad f(x) = \cos(x^3 - 6x) \quad -3 \quad f(x) = \frac{\sin x}{2\cos x - 1} \quad -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} \quad -1$$

$$\begin{cases} f(x) = \tan x & x \geq 0 \\ f(x) = \arctan x & x < 0 \end{cases} \quad -7 \quad f(x) = \sqrt[3]{2x+1}^2 \quad -6 \quad f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)^2} \quad -5$$

$$B - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x}{x^2+1}}{x}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

-1 حدد تقريبا للدالة f بدالة تالفة بجوار 0

-2 أعط قيمة مقربة لكل من $\sqrt[3]{1,003}$ و $\sqrt[3]{0,998}$

تمرين 3

حدد مجموعة الدوال الأصلية ومجالات تعريفها لكل دالة من الدوال التالية

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^3} \quad -2 \quad f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 \quad -1$$

$$f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x} \quad -4 \quad f(x) = \sqrt[3]{x-2} \quad -3$$

$$f(x) = (\cos x)^3 \quad -6 \quad f(x) = x \cos(x^2 + 3) \quad -5$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 6x + 8}} \quad -9 \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \quad -8 \quad f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \quad -7$$

تمرين 4

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & x \geq 1 \\ f(x) = 3x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

-1 بين أن f تقبل دالة أصلية على $[0; 2]$

-2 حدد مجموعة الدوال الأصلية لـ f على $[0; 2]$

تمرين 5

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 وأن نهاية f' عند 0 غير موجودة

تمرين 6

لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين بـ

$$\begin{cases} f(x) = 2x \sin x - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

-1 بين أن f غير متصلة في 0

2- بين أن F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

تمرين 7

نعتبر f دالة معرفة بـ $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$

بين أن f ثابتة على مجالات و حدد في كل مجال من هذه المجالات قيمة $f(x)$

تمرين 8

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول مختلفة في \mathbb{R}