

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$.

On note (C) sa courbe représentative.

1. a. Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Pour cela, on considère la fonction ϕ , définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\phi(x) = f(x) - \left(4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right)$

a. Montrer que $\phi'(x) = \frac{4\ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\phi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de ϕ' sur $]0 ; +\infty[$.

En déduire que, pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a $\phi'(x) \leq 0$.

c. Calculer $\phi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$ déterminer le signe de $\phi(x)$.

En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

CORRECTION

1. a. Soit $X = \ln x$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3 - X + 2X^2 = 0$ et $X = \ln x$

$\Delta = 25$ donc $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{3}{2}$ or $X = \ln x$ donc $\ln x = -1$ ou $\ln x = 1,5$ soit $x = e^{-1}$ ou $x = e^{1,5}$

b. Soit $X = \ln x$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 - X + 2X^2 > 0$ et $X = \ln x \Leftrightarrow X < -1$ ou $X > 1,5$ et $X = \ln x$

$X = \ln x$ donc : soit $X < -1$ c'est à dire $\ln x < -1$ ou encore $x < e^{-1}$

soit $X > 1,5$ c'est à dire $\ln x > 1,5$ ou encore $x > e^{1,5}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; e^{-1}[\cup]e^{1,5} ; +\infty[$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ or $f(x) = \ln x [2\ln x - 1] - 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ or $f(x) = \ln x [2\ln x - 1] - 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Pour dériver $(\ln x)^2$, il faut utiliser que si u est une fonction dérivable alors $(u^n)' = u' u^{n-1}$ avec dans ce cas $n = 2$

$u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ donc la dérivée de $(\ln x)^2$ est $2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

$f'(x) = -\frac{1}{x} + 4 \frac{1}{x} \ln x = \frac{1}{x} [4\ln x - 1]$

c. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $4\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0,25 \Leftrightarrow x > e^{0,25}$

x	0	$e^{0,25}$		$+\infty$
$f'(x)$		0		
f	$+\infty$	-3		$+\infty$

3. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$ est la droite de coefficient directeur $f'\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ passant par le point de coordonnées

$\left(e^{\frac{5}{4}} ; f\left(e^{\frac{5}{4}}\right)\right)$.

$f'\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = 4e^{-\frac{5}{4}}$ donc l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$ est de la forme $y = 4e^{-\frac{5}{4}}x + b$,

$f\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = -\frac{9}{8}$ donc cette droite passe par le point de coordonnées $\left(e^{\frac{5}{4}} ; -\frac{9}{8}\right)$ donc $-\frac{9}{8} = 4e^{-\frac{5}{4}} \times e^{\frac{5}{4}} + b$ soit $b = -\frac{41}{8}$

(T) a pour équation $y = 4 e^{-\frac{5}{4} x} - \frac{41}{8}$.

4. a. φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\varphi'(x) = f'(x) - 4 e^{-\frac{5}{4} x} = \frac{4 \ln x - 1}{x} - 4 e^{-\frac{5}{4} x}$

$$\varphi''(x) = \frac{4 \times \frac{1}{x} \times x - (4 \ln x - 1)}{x^2} = \frac{4 - 4 \ln x + 1}{x^2} = \frac{5 - 4 \ln x}{x^2}$$

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0; +\infty[$.

$$5 - 4 \ln x > 0 \Leftrightarrow 5 > 4 \ln x \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{5}{4}} \text{ d'où le sens de variation de } \varphi' :$$

x	0	$e^{\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$\varphi''(x)$		0	—
φ'		0	

donc pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) \leq 0$ donc φ est décroissante sur $]0; +\infty[$

c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.

$$\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = 0 \text{ d'où le signe de } \varphi(x) :$$

x	0	$e^{\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		0	—
φ		0	
$\varphi(x)$		0	—
position de (C) par rapport à la (T).	La courbe est au dessus de la tangente		Point d'intersection
			La courbe est en dessous de la tangente