On appelle nombre parfait tout entier naturel n dont la somme des diviseurs est égale à $2n$.

1. p est un nombre premier ($p > 2$). On note $a = 2^4 p$.

a. Trouvez tous les diviseurs de a.

b. Déduisez-en les valeurs de p pour lesquelles a est un nombre parfait.

2. p est un nombre premier ($p > 2$). n est un entier naturel non nul. On note $\alpha = 2^n p$.

a. Prouvez que la somme de tous les diviseurs de α est $(1 + p)(2^{n+1} - 1)$

b. Déduisez-en que si α est parfait, alors : $p = 2^{n+1} - 1$.

3. On suppose dans cette question que α est un nombre parfait. Démontrez que la somme des inverses de tous les diviseurs de α est égale à 2.

4. Trouvez quatre nombres parfaits

CORRECTION

1\. *a*. p est un nombre premier donc ses diviseurs sont 1 et p, alors les diviseurs de a sont : $1, p, 2, 2p, 2^2, 2^2 p, 2^3, 2^3 p, 2^4, 2^4 p$.

b. La somme des diviseurs de a est $S = 1 + p + 2 + 2p + 2^2 + 2^2 p + 2^3 + 2^3 p + 2^4 + 2^4 p$

$S = (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 31(1 + p)$

a est un nombre parfait si et seulement si $S = 2a$ soit $2^5 p = 31(1 + p)$

$(1 + p) - p = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, p est premier avec $1 + p$.

p est premier avec $1 + p$, p divise $31(1 + p)$ donc d'après le théorème de Gauss p divise 31, donc $p = 1$ ou $p = 31$

p est un nombre premier donc $p = 31$ donc $a = 2^4 \times 31 = 496$

2\. *a*. Prouvez que la somme de tous les diviseurs de α est $(1 + p)(2^{n+1} - 1)$

p est un nombre premier donc ses diviseurs sont 1 et p, alors les diviseurs de a sont : $1, p, 2, 2p, 2^2, 2^2 p, 2^3, 2^3 p, \dots\ 2^n, 2^n p$.

La somme des diviseurs de a est $1 + p + 2 + 2p + 2^2 + 2^2 p + 2^3 + 2^3 p + \dots + 2^n + 2^n p = (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n)$

$S = (1 + p)\dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$ donc $S = (1 + p)(2^{n+1} - 1)$

b. La somme des diviseurs de α est $(1 + p)(2^{n+1} - 1)$

α est un nombre parfait si et seulement si $S = 2a$ soit $2^{n+1} p = (1 + p)(2^{n+1} - 1)$

$(1 + p) - p = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, p est premier avec $1 + p$.

p est premier avec $1 + p$, p divise $(1 + p)(2^{n+1} - 1)$ donc d'après le théorème de Gauss, p divise $(2^{n+1} - 1)$.

De même $2^{n+1} p = (1 + p)(2^{n+1} - 1)$

$2^{n+1} - (2^{n+1} - 1) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, $(2^{n+1} - 1)$ est premier avec 2^{n+1}

$(2^{n+1} - 1)$ est premier avec 2^{n+1} et $(2^{n+1} - 1)$ divise $2^{n+1} p$ donc d'après le théorème de Gauss, $(2^{n+1} - 1)$ divise p.

p divise $(2^{n+1} - 1)$ et $(2^{n+1} - 1)$ divise p de plus $p > 0$ donc $p = 2^{n+1} - 1$.

3\. $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p + 2p + 2^2 p + \dots + 2^n p = 2\alpha = 2^{n+1} p$

donc en divisant terme à terme par $2^{n+1} p$, on obtient : $\dfrac{1}{2^n p} + \dfrac{1}{2^{n-1} p} + \dots + + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots + \dfrac{1}{2} + 1 = 2$

Soit en ordonnant : $1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2^2 p} + \dots + \dfrac{1}{2^n p} = 2$

La somme des inverses de tous les diviseurs de α est égale à 2.

4\. Cherchons des nombres parfaits de la forme $2^n(2^{n+1} - 1)$.

D'après la question 1, $2^4 \times 31 = 496$ est un nombre parfait

$2 \times 3 = 6$ or $6 = 1 \times 2 \times 3 \times 6$ or $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ donc 6 est un nombre parfait

$2^4 \times 7 = 28$

Les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 or $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$ donc 28 est un nombre parfait

$2^6 \times (2^7 - 1) = 8\,128$

Ses diviseurs sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 127 ; 254 ; 508 ; 1 016 ; 2 032 ; 4 064 ; 8 128

et $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1\,016 + 2\,032 + 4\,064 + 8128 = 16\,256 = 2 \times 8\,128$

8128 est un nombre parfait