Amérique du Sud novembre 2015

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
...	...	...	
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85\, u_n + 6$.

1\. *a*. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2\. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n > 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

3\. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4\. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u > 120-u$ faire
	n prend la valeur n +1
	u prend la valeur $0,85\times u$ +6
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Que fait cet algorithme ?

b. Quelle valeur affiche-*t*-il ?

CORRECTION

Partie A

1. La population totale est constante par une relation liant u_n et v_n donc $u_n + v_n = 120$

2. Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville donc 90 % restent à la campagne ; et chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale donc $u_{n+1} = 0{,}9\ u_n + 0{,}05\ v_n$
On obtient de même que $v_{n+1} = 0{,}1\ u_n + 0{,}95\ v_n$
En B3 il faut donc écrire = 0,9 * B2 + 0,05 * C2
En C3 il faut donc écrire = 120 – B3 ou = 0,1 * B2 + 0,95 * C2.

3. Conjecture : à long terme long terme un tiers de cette population habitera à la campagne et deux tiers en ville.

Partie B

1. *a*. **Initialisation :** $u_0 = 90$, $u_1 = 82{,}5$ donc $u_0 > u_1$
Hérédité : montrons que pour tout n de N, si $u_{n+1} > u_n$ alors $u_{n+2} > u_{n+1}$
$u_{n+1} > u_n$ donc $0{,}85\ u_{n+1} > 0{,}85\ u_n$ donc $0{,}85\ u_{n+1} + 6 > 0{,}85\ u_n + 6$ donc $u_{n+2} > u_{n+1}$, la propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge vers une limite positive.
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n > 0$.
a. $u_n + 1 - 40 = 0{,}85\ u_n + 6 - 40 = 0{,}85\ u_n - 34$ or $w_n = u_n - 40$ donc $u_n = w_n + 40$ donc $w_{n+1} = 0{,}85\ (w_n + 40) - 34 = 0{,}85\ w_n$
(w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
b. $w_n = 0{,}85^n\ w_0$ or $w_0 = u_0 - 40 = 50$ donc $w_n = 0{,}85^n \times 50$ donc $u_n = w_n + 40 = 0{,}85^n \times 50 + 40$

c. $u_n + v_n = 120$ donc $v_n = 120 - u_n$ soit $v_n = 80 - 0{,}85^n \times 50$.

3. $-1 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 80$, les conjectures sont validées.

4. *a*. Dans cet algorithme, u est initialisé par 90 et on calcule $0{,}85 \times u + 6$ donc u représente u_n soit la population rurale
$120 - u$ représente donc la population urbaine, *l*'algorithme *s*'arrête quand $u > 120 - u$ soit quand la population rurale est inférieure à la population urbaine.
Cet algorithme affiche le nombre *d*'années *n*, au bout duquel la population rurale sera inférieure à la population urbaine.

b. D'après le tableur, $u_5 > v_5$ et $u_6 < v_6$ donc la valeur affichée sera 6.