الجداء السلمي و تطبيقاته في الفضاء

I-الجداء السلمي

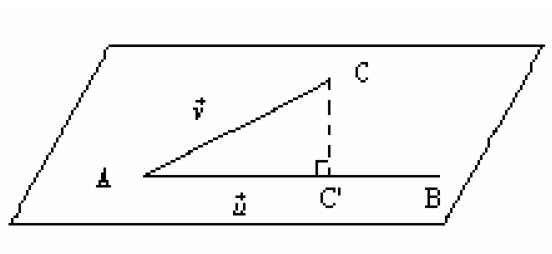
1- تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء V_3 و A نقطة من الفضاء E .

توجد نقطتان B وC من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ المعرف كما يلي

* إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$ حيث 'C المسقط العمودي لـ C على (AB)

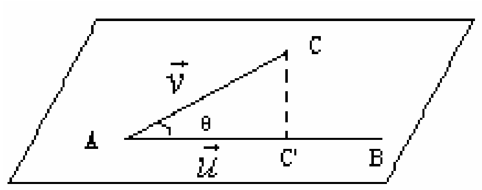
* إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



2- صيغة أخرى للجداء السلمي

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B وC ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ وθ قياس الزاوية $[\widehat{BAC}]$ و'C المسقط العمودي لـ C على (AB)

لديـنا $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$

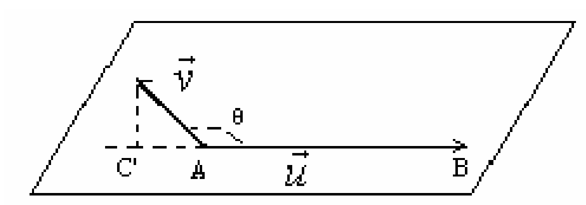


* إذا كان $0\leq\theta\prec\frac{\pi}{2}$ فان $\overline{AC'}=\overline{AC}\cos\theta$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{AB}\times\overline{AC}\cos\theta=AB\times AC\cos\theta$

* إذا كان $\frac{\pi}{2}\prec\theta\leq\pi$ فان

$$\overline{AC'}=\overline{AC}\cos(\pi-\theta)=-\overline{AC}\cos\theta$$



ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\overline{AB}\times\overline{AC}\cos\theta=AB\times AC\cos\theta$

* إذا كان $\theta=\frac{\pi}{2}$ فان $\overline{AC'}=0$ و منه $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\theta$

خاصية

إذا كانت $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B وC ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ وθ قياس الزاوية $[\widehat{BAC}]$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\theta$

خاصية

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{AB}\times\overline{C'D'}$ حيث C' ; D' المسقطان العموديان لـ C ; D على (AB) بالتوالي.

3- خاصيات
أ- تعامد متجهتين :
تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء V_3.
تكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

ب- منظم متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة وA و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $\vec{u}\cdot\vec{u}=AB^2$
إذن لكل متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ $\vec{u}\cdot\vec{u}\succ 0$
العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ و يكتب $\vec{u}^2$
العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويكتب $\lVert\vec{u}\rVert$

ملاحظة * $\lVert\vec{u}\rVert^2=\vec{u}^2$

* اذا كانت $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين وكان θ قياس الزاوية $\left[\widehat{BAC}\right]$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert\times\lVert\vec{v}\rVert\cos\theta$

ج- خاصيات

$\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in V_3^3 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$	متطابقات هامة $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ * $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$	$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
* $\vec{u}\cdot\alpha\vec{v}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$	

II- صيـــــغ تحليليـــــة
1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان
تعريف

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائـــية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.
$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أسا س للفضاء V_3
يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى.
يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ تعامد وممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى و $\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=\lVert\vec{k}\rVert=1$

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي
أ- خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

ملاحظة

إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{k}=z$; $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$; $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

-* إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
-* اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
فان $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

تمرين

1- حدد متجهة $\vec{w}$ واحدية وعمودية على $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-2;0)$

2 - حدد متجهة $\vec{w}$ عمودية على $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;1)$ و $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

تمرين

نعتبر $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ و $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$ و $C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

III- تطبيقات الجداء السلمي في V_3

1- تعامد المستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمين من الفضاء موجهين بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ على التوالي

$$(D_1)\perp(D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 0$$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصية

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و (D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}_3$

$$(D)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{u}_1\perp\vec{u}_3 \quad \text{و} \quad \vec{u}_2\perp\vec{u}_3$$

ج- ملاحظات واصطلاحات

* المتجهة $\vec{u}$ الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية للمستوى (P).
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان كل متجهة $\vec{v}$ مستقيمية مع $\vec{u}$ تكون منظمية للمستوى (P)
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) و $\vec{v}$ منظمية لمستوى (P') وكانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان (P) و(P') متوازيان
* إذا كان $(A;B)\in(P)^2$ و $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

تمرين في الفضاء المنسوب إلى معلم م.م. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من A(-1; 2 0) و العمودي على المستوى (P) الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(2;1;1)$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم م.م. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوى(P) الذي معادلته ax-2y+z-2=0

و المستقيم (D) تمثيله بارامتري $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+3t \\ z = -2+bt \end{cases} \quad t\in IR$

1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)

2- حدد a وb لكي يكون $(D)\perp(P)$

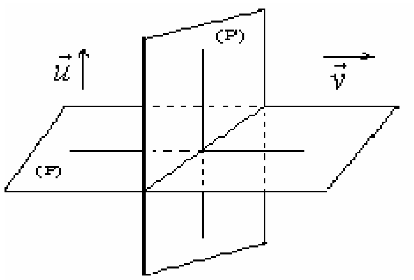
د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصية

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين منظميتين لهما على التوالي

$(P)\perp(P')$ اذا وفقط اذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$



3- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

مبرهنة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
* المستوى المار من A و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$
* مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ المستوى المار من A و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له

b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

خاصية

* كل مستوى (P) في الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$
* كل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه
*في الفضاء معادلة المستوى (P) المار من $A(x_0;y_0;z_0)$ و المتجهة $\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

4) مبرهنة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء و k عددا حقيقيا
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=k$ هي المستوى (P) العمودي على $D(A;\vec{u})$ في النقطة H
حيث $\overline{AH}=\frac{k}{AB}$; $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

تمرين

نعتبر (P) : 2x-y+3z+1=0 $(D):\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

1- حدد متجهة $\vec{u}$ منظمية على (P) ونقطة منه.
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و $\vec{n}(1,2,1)$ منظمية عليه.
3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A' (2;0;3) والعمودي على (D)
4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و الموازي لـ (P)

دراسة الاوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

(P) المستوى المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه (P') المستوى المار من A' و $\vec{v}$ منظمية عليه

الحالة 1 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان
إذا كان (P') $\ni$ A أو (P) $\ni$ A' فان (P) = (P')
إذا كان (P') $\not\ni$ A و (P) $\not\ni$ A' فان (P) و (P') متوازيان قطعا.

الحالة 2 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين
- $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow (P')\perp(P)$
- اذا كان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير متعامدتين فان (P) و (P') متقاطعان.

ب- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء

(P) المستوى المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه (D) المستقيم المار من A' و $\vec{v}$ موجهة له

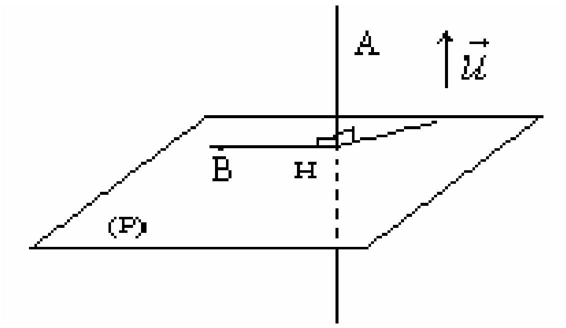
الحالة 1 إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $(D)\perp(P)$

الحالة 2 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين
- $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow$ (P) و (D) متوازيان
- اذا كان $\vec{v} \not\perp \vec{u}$ فان (D) يخترق (P)

IV مسافة نقطة عن مستوى

1- تعريف و خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH حيثH المسقط العمودي لـ A على(P) نكتب
$d\left(A;(P)\right)=AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\bullet\vec{u}\right|}{\|\vec{u}\|}$ حيث $B\in(P)$ و $\vec{u}$ منظمية على(P)



2- خاصية

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ نقطة من الفضاء

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال

ليكن (P) مستوى مار من $B\left(2;1;3\right)$ و $\vec{u}\left(1;-1;\sqrt{2}\right)$ منظمية عليه لتكن A (1;2;0)
حدد $d\left(A;(P)\right)$

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 و (D) المستقيم الممثل
بارا متريا بـ $\begin{cases} x=3t \\ x=-2-3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
2- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))
3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
نعتبر المستوى(P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0 و (D) المستقيم المعرف بـ
$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)