**Antilles-Guyane septembre 2010**

**EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats**
**PARTIE A - Restitution organisée des connaissances**
On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et que pour tout $x$ de $]\,0\,;+\infty\,[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ qui à $x$ associe $\dfrac{1}{x}$.

**PARTIE B - Étude de fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.
On note C la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, d'unité graphique 3 cm.

**I - Étude d'une fonction auxiliaire**
On considère la fonction $g$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
**1.** Étudier les variations de $g$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
**2.** En déduire le signe de $g$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

**II - Étude de la fonction *f* et tracé de sa courbe représentative** C
**1.** Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
**2.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $f$ puis montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C .
**3.** Soit $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ .Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $]\,0\,;+\infty\,[$.
**4.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$ .
**5.** Déterminer le point A de la courbe C en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.
**6.** Dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, tracer les droites D et T et la courbe C .

**III - Calcul d'une aire**
**1.** Montrer que $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

**2.** En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe C . On exprimera cette aire en $cm^2$. Hachurer cette région sur le graphique.

**EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats**
**L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.**
**Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.**
**1.** L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, vérifiant $|z-2| = |z-2i|$ est la droite d'équation $y = x$.

**2.** Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes $a$, $b$ et $c$ vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.

**3.** L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}$ $(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

**4.** L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
La sphère de centre $A(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

**EXERCICE 3 5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$.

**1.** Calculer $u_2$ et en déduire que la suite $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

**2.** On définit la suite $(v_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$.

***a.*** Calculer $v_0$.
***b.*** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

***c.*** En déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

***d.*** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**3.** On définit la suite $(w_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

***a.*** Calculer $w_0$.

***b.*** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} u_n$, exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $v_n$.

***c.*** En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

***d.*** Exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

**4.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

**5.** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

**EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats**
**Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.**

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :
• si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
• si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :
M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

**1.** Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
**2.** Un animal est choisi au hasard.
***a.*** Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
***b.*** Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
**3.** Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
**4.** On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
***a.*** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
***b.*** Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
**5.** Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

| Coût | 0 | 100 | 1 000 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,9405 | 0,0580 | 0,0015 |

***a.*** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
***b.*** Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

## CORRECTION

**EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats**
**PARTIE A - Restitution organisée des connaissances**

La fonction $f$ définie sur ] 0 + ∞ [ par $f(x) = \exp(\ln x)$ est la composée des fonction $v = \exp$ et $u = \ln$
donc $f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = \exp(\ln x) \times u'(x)$ or $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$
donc $x\,u'(x) = 1$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$. La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur ] 0 ; + ∞ [ qui à $x$ associe $\dfrac{1}{x}$.

**PARTIE B - Étude de fonction**
**I - Étude d'une fonction auxiliaire**

**1.** $g$ est définie dérivable sur ] 0 ; + ∞ [ et $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$g'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$, d'où le signe de $g'(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | ↘ | $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | ↗ | |

**2.** $g$ est décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;+\infty\right[$ donc admet un minimum en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2$ or $0 < \ln 2 < 1$ donc $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ donc $g(x) > 0$ sur ] 0 ; + ∞ [

**II - Étude de la fonction *f* et tracé de sa courbe représentative** C

**1.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \times \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
La courbe (C) admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.

**2.** $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - x = \dfrac{\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$, la droite D d'équation $y = x$ est asymptote en + ∞ à la courbe C .

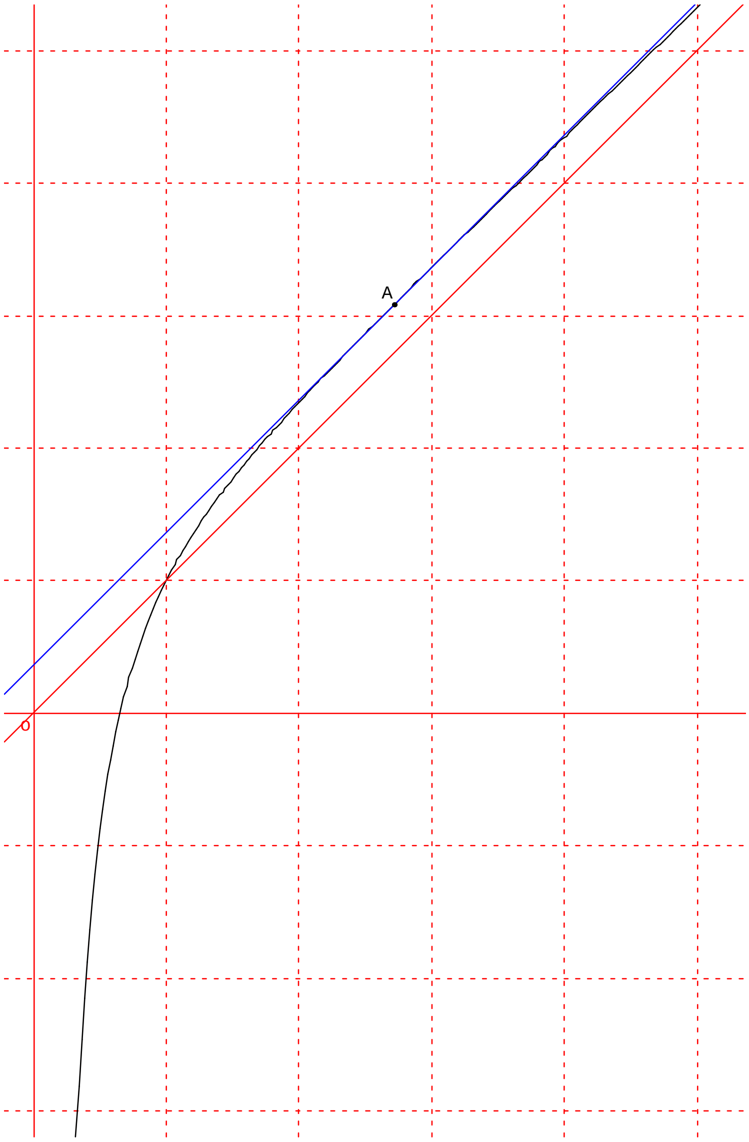
**3.** $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

**4.** $g(x) > 0$ sur ] 0 ; + ∞ [ donc $f'(x) > 0$ sur ] 0 ; + ∞ [, $f$ est strictement croissante sur ] 0 ; + ∞ [.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**5.** La tangente en A a pour coefficient directeur $f'(x_A)$, elle est parallèle à la droite D si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Il faut donc résoudre $f'(x) = 1$ soit $x^2 + 1 - \ln x = x^2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$
$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$ donc A est le point de coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$

**6.** En rouge, la droite D ; en bleu la droite T




### III - Calcul d'une aire

**1.** Soit $u(x) = \ln x$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{\ln x}{x} = u'(x)\,u(x)$ donc $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$ or $\ln e = 1$

et $\ln 1 = 0$ donc $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

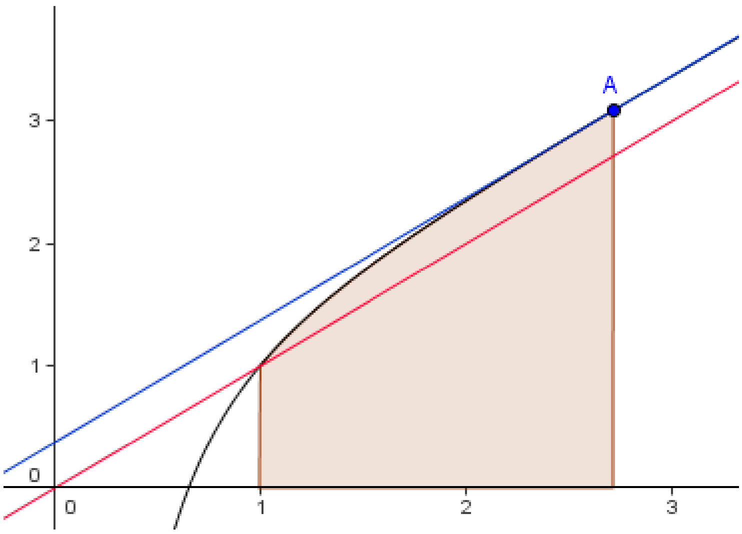
**2.** L'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe C est égale à $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ en unités d'aire. Cette aire est égale à

$$\int_1^e \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_1^e \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \frac{1}{2}e^2.$$

L'unité de longueur est 3 cm donc l'unité d'aire est 9 cm$^2$

$A = \dfrac{9}{2}e^2$ cm$^2$



**EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats**

**1. VRAI**

Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ alors $z - 2 = (x - 2) + \mathrm{i}\,y$ et $z - 2\,\mathrm{i} = x + \mathrm{i}\,(y - 2)$

$|z - 2| = |z - 2\,\mathrm{i}| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = y$

L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$, vérifiant $|z - 2| = |z - 2\,\mathrm{i}|$ est la droite d'équation $y = x$.

**2. VRAI**

Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes $a$, $b$ et $c$ vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors $b - a = -3\,(c - a)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ donc A, B et C sont alignés.

**3. VRAI**

La droite de l'espace de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+1 \end{cases}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3) (coefficients de $t$) et si $t = 1$ passe par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) donc la droite de l'espace passant par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3) comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t+1 \end{cases}$

**4. FAUX**

La distance du point A au plan P est $d = \dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \neq 10$ donc la sphère de centre A(1 ; 1 ; 1) et de rayon 10 n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

**EXERCICE 3 5 points**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

**1.** $u_2 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\times(-1) = \dfrac{3}{4}$

$u_1 - u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4}$ donc la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.

$u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0$ et $-\dfrac{1}{2}u_1 = -\dfrac{1}{4}$ donc $-\dfrac{1}{2}u_1 \neq u_2$ donc la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

**2.** On définit la suite $(v_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

***a.*** $v_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = 1$

***b.*** $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n\right) = \dfrac{1}{2}v_n$.

***c.*** $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

***d.*** $v_n = q^n v_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 1 = \dfrac{1}{2^n}$.

**3. *a.*** $w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = -1$

***b.*** $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n}{v_{n+1}} + \dfrac{u_n}{2\,v_{n+1}}$

or $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ soit $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = 2$ et $2\,v_{n+1} = v_n$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = 2 + \dfrac{u_n}{2\,v_{n+1}} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$ donc $w_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$

***c.*** pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$.

***d.*** $w_{n+1} = 2 + w_n$ donc $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison 2 donc $w_n = w_0 + 2n = 2n - 1$

**4.** Pour tout entier naturel $n$ : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n v_n = (2n - 1) \times \dfrac{1}{2^n}$ soit $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

**5.** $S_0 = \sum_{k=0}^{k=0} u_k = u_0 = -1$ or si $n = 0$, . $2 - \dfrac{2n+3}{2^n} = 2 - 3 = -1$ donc pour $n = 0$, $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

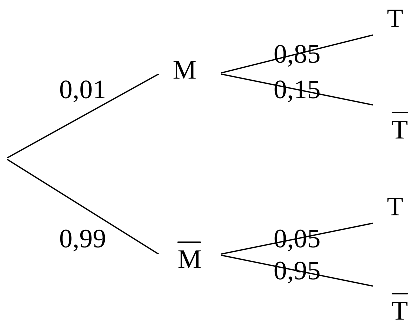
Montrons que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ si $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$ alors $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} + \dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2(2n+3)}{2^{n+1}} + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \dfrac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}}$

$S_{n+1} = = 2 - \dfrac{2n+5}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$. La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats**

**1.**




On pouvait représenter la situation par un tableau

| | M | $\overline{\text{M}}$ | Total |
|---|---|---|---|
| T | 0,85 | $0{,}05 \times 99 = 4{,}95$ | 5,8 |
| $\overline{\text{T}}$ | 0,15 | $0{,}95 \times 99 = 94{,}05$ | 94,2 |
| Total | 1 | 99 | 100 |

**2. *a.*** $p(\text{T} \cap \text{M}) = 0{,}01 \times 0{,}85 = 0{,}0085$

***b.*** $p(\text{T}) = p(\text{T} \cap \text{M}) + p(\text{T} \cap \overline{\text{M}}) = 0{,}0085 + 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}058$

**3.** $p(\text{M} / \text{T}) = \dfrac{p(\text{T} \cap \text{M})}{p(\text{T})} = \dfrac{0{,}0085}{0{,}058} = 0{,}1466$

**4. *a.*** On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
l'animal a un test positif $p = 0{,}0085$
l'animal n'a pas un test positif $q = 1 - p = 0{,}9915$
donc la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif, suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,0085). La probabilité d'avoir $k$ succès est : $p(\text{X} = k) = \dbinom{5}{k} 0{,}0085^{k} \times 0{,}9915^{5-k}$

***b.*** $p(\text{X} \geq 1) = 1 - p(\text{X} = 0) = 1 - 0{,}9915^5 = 0{,}0418$

**5. *a.*** Soit Y la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager

| Coût $y$ | 0 | 100 | 1 000 |
|---|---|---|---|
| Probabilité $p(\text{Y} = y)$ | 0,9405 | 0,0580 | 0,0015 |
| $x\,p(x)$ | 0 | 5,8 | 1,5 |

donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager est 5,8 + 1,5 = 7,3 €

***b.*** Soit $\text{Y}_k$ la variable aléatoire associant au $k$-ième animal le coût à engager.
La somme à prévoir pour les 200 bêtes est $\text{E}(\text{Y}_1 + \ldots + \text{Y}_{200}) = 200\,\text{E}(\text{Y}_1) = 1460$ €