Métropole Juin 2011

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. a. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(T)$. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

a. Justifier par un calcul la phrase :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i)$
- $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 - i)$
- $z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1 - i)$
- $z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1 + i)$

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z + i| = |z - 1|$ est :

- la médiatrice du segment [BC],
- le milieu du segment [BC],
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment [AD].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
- le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
- la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}$.

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3.·

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\,;0\right)$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. a. Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

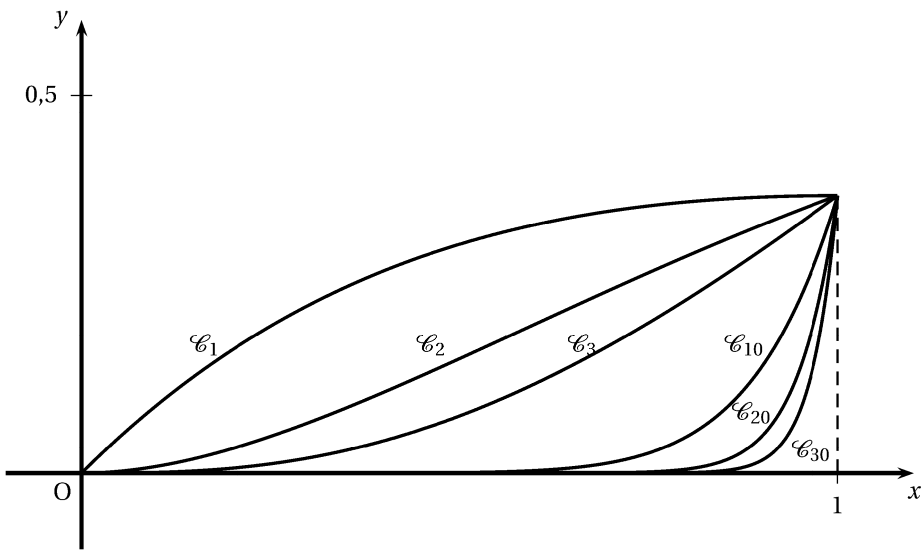
4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.

b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_1^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30} comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
b. Démontrer cette conjecture.
c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par P le plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées (x_0 ; y_0 ; z_0).
On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan P .
On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ est un vecteur normal au plan P.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\,(M_0, \text{P})$ du point M_0 au plan P , c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que :

$$d\,(M_0\,, \text{P}\,) = \frac{|\,a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $|\,\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}\,| = M_0H\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Démontrer que $\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n} = -a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0 - d$

3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (− 3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (− 7 ; 0 ; 4).

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan P et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2\,y - z - 1 = 0$.

b. Déterminer la distance d du point F au plan P .

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.

On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan P .

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan P .

c. Retrouver le résultat de la question 1. b.

3. Soit S la sphère de centre F et de rayon 6.

a. Justifier que le point B appartient à la sphère S .

b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle C , intersection de la sphère S et du plan P .

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs vérifiant $a\,u + b\,v = 1$.
Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit $b\,c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$, alors $a \equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5] \end{cases}$.

1. Recherche d'un élément de S .

On désigne par (u ; v) un couple d'entiers relatifs tel que $17\,u + 5\,v = 1$.

a. Justifier l'existence d'un tel couple (u ; v).

b. On pose $n_0 = 3 \times 17\,u + 9 \times 5\,v$.

Démontrer que n_0 appartient à S .

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à S .

2. Caractérisation des éléments de S .

a. Soit n un entier relatif appartenant à S .

Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85\,k$ où k est un entier relatif.

3. Application

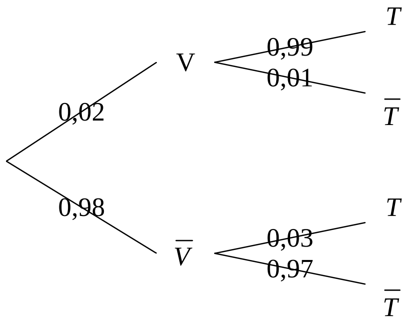
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. *a.* Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus donc $P(V) = 0{,}02$,
La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 donc $P_V(T) = 0{,}99$,
La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 donc $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$.



b. $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$

2. la probabilité que le test soit positif est $P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0{,}0198 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}049\,2$.

a. $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0{,}4024$ donc si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée.

b. $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}98 \times 0{,}97}{1 - 0{,}0492} \approx 0{,}9998$

Si le test est négatif, il y a environ 99,98 % de « chances » que la personne ne soit pas contaminée.

PARTIE B

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- la personne est contaminée par le virus ($p = 0{,}02$)
- la personne n'est pas contaminée par le virus ($q = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$)

donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,02)

2. La probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10 est $p(X \geq 2)$

$p(X \geq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] \approx 0{,}01617$

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$ soit $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z-1)+1$

donc l'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe : $z_E = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(-i-1)+1$

donc $z_E = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-i)$.

2. $|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow$ DM = AM
L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+i| = |z-1|$ est la médiatrice du segment [AD].
Le quadrilatère ABCD est un carré donc la médiatrice du segment [AD] est aussi celle de [BC]. (erreur d'énoncé)

3. $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. où $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ si M ≠ C et M ≠ D, le triangle MCD est rectangle en M.
$\frac{z+i}{z+1} = 0 \Leftrightarrow z = -i \Leftrightarrow$ M = D donc l'ensemble des points d'affixe z telle que $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est le cercle de diamètre [CD] privé du point C.

4. $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BM})$ soit $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BM}) = 2k\pi$. où $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BM}) = 2k\pi$. où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. où $k \in \mathbb{Z}$ est la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. *a.* $f_1(x) = x\,e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

b. La fonction f_1 est définie dérivable sur R et $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)\,e^{-x}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0		$-$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

c. La tangente en 1 à C_1 est horizontale donc $k \neq 1$ or k est un entier supérieur ou égal à 1 donc $k \geq 2$.

2. *a.* pour $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = e^{-1}$ donc toutes les courbes C_n passent par le point O et le point de coordonnées $(1\,;\,e^{-1})$.

b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = n\,x^{n-1}\,e^{-x} + x^n \times (e^{-x}) = x^{n-1}(n-x)\,e^{-x}$.

3. $f_3'(x) = x^2(3-x)\,e^{-x}$, donc $f_3'(x)$ a le même signe que $3-x$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$+$	0		$-$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$9\,e^{-3}$	$\searrow$	0

f_3 est croissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$ donc la fonction f_3 admet un maximum atteint pour $x = 3$.

4. *a.* $k \geq 2$ donc $f'_k(1) = (k-1)\,e^{-1}$, $f_k(1) = e^{-1}$ donc la droite T_k a pour équation : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$

$y = (k-1)\,e^{-1}(x-1) + e^{-1} \Leftrightarrow y = [(k-1)(x-1)+1]\,e^{-1} \Leftrightarrow y = [(k-1)\,x + 2 - k]\,e^{-1}$

La droite T_k coupe l'axe des abscisses quand : $[(k-1)\,x + 2 - k]\,e^{-1} = 0$ or $e^{-1} \neq 0$ donc $(k-1)\,x + 2 - k = 0$ donc $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;\,0\right)$.

b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\,;\,0\right)$ donc $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1)$

$\Leftrightarrow 5\,k - 10 = 4\,k - 4k = 6$

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_1^1 x^n\,e^{-x}\,dx$

1. Soit $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} & \text{alors} \quad u(x) = -e^{-x} \\ v(x) = x & \text{alors} \quad v'(x) = x \end{cases}$ donc $I_1 = \left[-x\,e^{-x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -x\,e^{-x}\,dx$

$I_1 = -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1$ donc : $I_1 = 1 - 2\,e^{-1}$

2. *a.* La fonction f_n est continue positive sur $[0\,;\,1]$, I_n mesure l'aire comprise entre les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe C_n. C_{n+1} semble être au-dessous de C_n sur $[0\,;\,1]$ donc apparemment la suite (I_n) est décroissante.

b. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^1 x^n\,e^{-x}\,dx - \int_1^1 x^n\,e^{-x}\,dx = \int_1^1 (x^{n+1} - x^n)\,e^{-x}\,dx = \int_1^1 x^n(x-1)\,e^{-x}\,dx$

La fonction $x \to x^n(x-1)\,e^{-x}$ est continues négative sur $[0\,;\,1]$ donc $\displaystyle\int_1^1 x^n(x-1)\,e^{-x}\,dx \leq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$

La suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante minorées par 0 donc est convergente.

d. $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ donc $x^n\,e^{-1} \leq x^n\,e^{-x} \leq x^n$ donc $\displaystyle\int_1^1 x^n\,e^{-1}\,dx \leq \int_1^1 x^n\,e^{-x}\,dx \leq \int_1^1 x^n\,dx$

$\displaystyle\int_1^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{n+1}\,e^{-1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A – Restitution organisée de connaissances

1. La droite **(**M_0H) est perpendiculaire au plan P donc les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc ($\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}$) = $k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc | cos($\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}$) | = 1

$\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n} = M_0H \times \|\vec{n}\|$ cos($\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}$) donc $|\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2. Le vecteur $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ est un vecteur normal au plan P. Le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc il existe un réel t tel que $\overrightarrow{M_0H} = t\,\vec{n}$. La droite ($M_0H$) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \\ z = z_0 + t\,c \end{cases}$ avec $t \in$ R.

H appartient à P donc $a\,(x_0 + t\,a) + b\,(y_0 + t\,b) + c\,(z_0 + t\,c) + d = 0$ donc $t = \dfrac{a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d}{a^2+b^2+c^2}$

$$\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n} = t\,\vec{n}\,.\,\vec{n} = \frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d}{a^2+b^2+c^2} \times \|\vec{n}\|^2 = -a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0 - d$$

3. $\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n} = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = -a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0 - d$

donc $|\overrightarrow{M_0H}\,.\,\vec{n}| = \left| a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d \right| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

donc $M_0H = d\,(M_0\,,\,\text{P}\,) = \dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

1. *a.* $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées (– 7 ; 1 ; – 5) et $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées (– 3 ; 2 ; 1)

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B, C définissent un plan P.

Soit Q le plan d'équation cartésienne $x + 2\,y - z - 1 = 0$, 4 + 2 × 2 – 5 – 1 = 0 donc A ∈ Q

– 3 + 2 × 2 – 0 – 1 = 0 donc B ∈ Q

1 + 2 × 3 – 6 – 1 = 0 donc C ∈ Q, les points ABC définissent un plan P donc P = Q.

P a pour équation cartésienne $x + 2\,y - z - 1 = 0$.

b. $d = d(\text{F} ; \text{P}) = \dfrac{|-7 + 2\times 0 - 4 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.

2. *a.* La droite Δ qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan P. Le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$ est un vecteur normal au plan P et est un vecteur directeur de (Δ). La droite (Δ) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2\,t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. H est un point de Δ donc il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées (– 7 + t ; 2 t ; 4 – t)

H ∈ P donc (– 7 + t) + 2 × 2 t – (4 – t) – 1 = 0 soit 6 t – 12 = 0 donc t = 2, H a pour coordonnées (– 5 ; 4 ; 2)

c. $\text{FH}^2 = (5 - 7)^2 + 4^2 + (2 - 4)^2 = 4 + 16 + 4 = 24 = 4 \times 6$ donc d(F ; P) = FH = $2\sqrt{6}$

3. Soit S la sphère de centre F et de rayon 6.

a. $\text{BF}^2 = 6$ donc le point B appartient à la sphère S .

b. La distance du plan P au centre de la sphère est inférieure au rayon de la sphère donc l'intersection de la sphère et du plan est un cercle de centre H projection orthogonale de F sur P.

Soit M un point du cercle. Le triangle FHP est rectangle en H donc $\text{HF}^2 + \text{HM}^2 = \text{MF}^2$

MF est égal au rayon de la sphère donc MF = 6 donc $24 + \text{HM}^2 = 36$ donc $\text{HM}^2 = 12$ donc HM = $2\sqrt{3}$.

Le rayon du cercle C , intersection de la sphère S et du plan P est égal à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

1. a et c sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + c\,v = 1$
$a\,b\,u + b\,c\,v = b$ et c divise $a\,b$ donc c divise $a\,b\,u + b\,c\,v$ donc c divise b

2. p divise a donc il existe un entier relatif k tel que $a = p\,k$
$u\,k\,p + v\,k\,q = k$ donc $u\,a + v\,k\,q = k$
q divise a donc q divise $u\,a + v\,k\,q$ donc q divise k il existe un entier relatif k' tel que $k = q\,k'$ donc $a = k'\,q\,p$ donc $p\,q$ divise a

Partie B

1. *a.* 17 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et tels que $17\,u + 5\,v = 1$.

1. *b.* n est congru à $9 \times 5\,v$ [17] donc $n \equiv 9 \times (1 - 17\,v)$ [17] soit $n \equiv 9$ [17].
n $n \equiv 3 \times 17\,u$ [5] donc $n \equiv 3 \times (1 - 5\,v)$ [5] soit $n \equiv 3$ [5] donc n appartient à (S).

2. *a.* $n - n_0$ est divisible par 17 et 5, comme 17 et 5 sont premiers entre eux alors 17×5 divise $n - n_0$
Si $n - n_0$ est divisible par 17 et 5 alors $n - n_0$ est congru à 0 [85].
Réciproquement : si $n - n_0$ est congru à 0 [85] il existe un entier relatif k tel que $n - n_0 = 85\,k$
17 divise 85 donc 17 divise $n - n_0$
5 divise 85 donc 5 divise $n - n_0$ donc si $n - n_0$ est congru à 0 [85] alors $n - n_0$ est divisible par 17 et 5.
donc l'équivalence est prouvée.

2. *b.* $43 = 17 \times 2 + 9$ donc $43 \equiv 9$ [17]
$43 = 8 \times 5 + 3$ donc $43 \equiv 3$ [5]
43 appartient à (S) donc si n appartient à (S), $n - 43$ est divisible par 85.
Si $n = 85\,k + 43$ alors $n \equiv 43$ donc $n \equiv 9$ [17] et $n \equiv 43$ [5] donc $n \equiv 3$ [5] donc n appartient à (S).

3. Zoé possède n jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9 donc $n \equiv 9$ [17]
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3 donc $n \equiv 3$ [5] donc n appartient à (S) donc il existe un entier k tel que $n = 43 + 85\,k$
n est compris entre 300 et 400 donc $300 \le 43 + 85\,k \le 400$ donc $\dfrac{300 - 43}{85} \le k \le \dfrac{400 - 43}{85}$ soit $k = 4$ donc $n = 383$