Liban juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère les points A et B d'affixes respectives i et − i.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de − i associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{z+\mathrm{i}}$.

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?
2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe 1+ i ?
3. Montrer que l'équation $\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{z+\mathrm{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.
4. Vérifier que $z' = \dfrac{\mathrm{i}\,(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}$, en déduire OM′ = $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = (\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle (C) que l'on précisera.
6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M′ est située sur l'axe des abscisses.

CORRECTION

1. $f(0) = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ donc l'image par l'application f du point O est le point d'affixe – i.

2. $f(z) = 1 + \mathrm{i} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}\,z = (1 + \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) \Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}\,z = z + \mathrm{i} + \mathrm{i}\,z - 1 \Leftrightarrow 1 = z + \mathrm{i} - 1 \Leftrightarrow z = 2 - \mathrm{i}$

3. $\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{z+\mathrm{i}} = z \Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}\,z = z\,(z + \mathrm{i}) \Leftrightarrow z^2 + \mathrm{i}\,z = 1 + \mathrm{i}\,z \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

4. $\dfrac{\mathrm{i}\,(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}^2}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{z+\mathrm{i}}$

OM' = $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{z+\mathrm{i}}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{i}\,(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|\mathrm{i}|\,|z-\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|}$ or $|\mathrm{i}| = 1$ et $|z - \mathrm{i}|$ = AM et $|z + \mathrm{i}|$ = BM donc OM' = $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$

Si $z \neq \mathrm{i}$ et $z \neq -\mathrm{i}$ alors $f(z)$ existe et $f(z) \neq 0$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \arg f(z) + 2k\pi$

$(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \arg \dfrac{\mathrm{i}\,(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \arg \mathrm{i} + \arg \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \dfrac{\pi}{2} + \arg \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}} + 2k\pi$

$(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = (\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. Si M appartient à l'axe des abscisses, cet axe étant la médiatrice de [AB] alors MA = MB donc OM' = 1
M' appartient au cercle de centre O de rayon 1.

6. Si M un point du cercle de diamètre [AB] – {A , B} alors : $(\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $(\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

donc $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \pi + 2k\pi$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = 0 + 2k\pi$ donc M' est situé sur l'axe des abscisses.