

EXERCICE 1

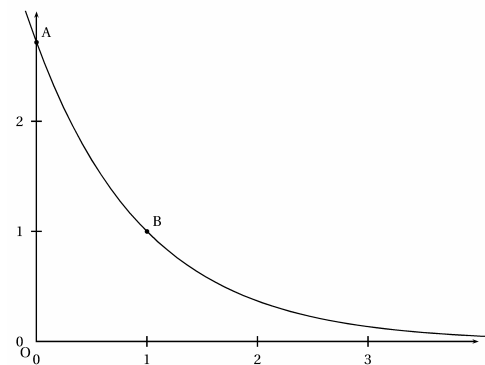
On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc AB de courbe comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



CORRECTION

$$\begin{aligned} \text{Soit } u'(t) &= \pi & u(t) &= \pi t \\ v(t) &= (1 - \ln t)^2 & v'(t) &= -2 \frac{1}{t} (1 - \ln t) \end{aligned}$$

$$\text{donc } V = \left[\pi t (1 - \ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e \pi t \times \frac{-2}{t} (1 - \ln t) dt$$

$$V = -\pi + 2\pi \int_1^e (1 - \ln t) dt$$

$$\text{Soit } J = \int_1^e (1 - \ln t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } u'(t) &= 1 & u(t) &= t \\ v(t) &= (1 - \ln t) & v'(t) &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$J = \left[t (1 - \ln t) \right]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = -1 + \int_1^e 1 dt = -1 + (e - 1) = e - 2$$

$$V = -\pi + 2\pi(e - 2) = \pi(2e - 5) \text{ unités de volume}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
2. On considère les points M et M' de la courbe C d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe C ?
3. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
 - a. Calculer A_n .
 - b. Étudier la limite éventuelle de A_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit λ un réel positif, On note $V(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$.

On admet que $V(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe C obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

- a. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x : $\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a e^x}{e^x + 1} + \frac{b e^x}{(e^x + 1)^2}$
- b. Exprimer $V(\lambda)$ en fonction de λ .
- c. Déterminer la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

CORRECTION

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{(1 + e^{-x}) e^x} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

2. M a pour coordonnées $(x ; y)$ et M' $(x' ; y')$ avec $y = f(x)$; $x' = -x$ et $y' = f(x') = f(-x)$

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ et } f(-x) = \frac{1}{1 + e^x} \text{ donc } f(x) + f(-x) = 1 \text{ donc } \frac{x + x'}{2} = 0 \text{ et } \frac{y + y'}{2} = 0,5$$

donc A a pour coordonnées $(0 ; 0,5)$, A est donc le centre de symétrie de la courbe de f .

3. a. f est positive sur son domaine de définition, $0 \leq n$ donc $A_n = \int_0^n f(x) dx$

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ donc une primitive de } f \text{ est } F \text{ définie par } F(x) = \ln(1 + e^x)$$

$$A_n = F(n) - F(0) = \ln(1 + e^n) - \ln 2$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$

$$4. a. \quad \text{Pour tout } x \text{ réel, } \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a e^x}{e^x + 1} + \frac{b e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{a e^{2x} + (a + b) e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ donc } a e^{2x} + (a + b) e^x = e^{2x}$$

$$\text{donc } a = 1 \text{ et } a + b = 0 \text{ donc } b = -1 ; \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$b. \quad V(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-\lambda}^0 \pi \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} dx = \int_{-\lambda}^0 \pi \left[\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right] dx$$

$$\text{Soit } u(x) = 1 + e^x \text{ donc } u'(x) = e^x \text{ donc } \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{u'}{u} - \frac{u'}{u^2} = \frac{u'}{u} - u' u^{-2}$$

$$\text{Une primitive de } \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ est la fonction } \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1 + e^x} \text{ donc } V(\lambda) = \ln 2 + \frac{1}{1 + e^2} - \ln(1 + e^{-\lambda}) - \frac{1}{1 + e^{-\lambda}}$$

$$c. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-\lambda}) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\lambda}} = 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} V(\lambda) = \ln 2 + \frac{1}{1 + e^2} - 1$$

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{-x+2}$

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer : $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

2. On définit le solide S obtenu par révolution autour l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy) (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume V du solide est donné par : $V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$

a. Exprimer V en fonction de I .

b. Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

CORRECTION

$$1. \quad I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx \text{ soit } u'(x) = e^{-2x} \quad u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \\ v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$$

$$\text{donc } I = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^3 - \int_0^3 -x e^{-2x} dx = -\frac{9}{2} e^{-6} + \int_0^3 x e^{-2x} dx$$

$$\text{Soit } J = \int_0^3 x e^{-2x} dx \text{ soit } u'(x) = e^{-2x} \quad u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \\ v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$\text{donc } J = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{3}{2} e^{-6} + \int_0^3 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{3}{2} e^{-6} + \left[\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_0^3$$

$$J = -\frac{3}{2} e^{-6} + -\frac{1}{4} e^{-6} + \frac{1}{4}$$

$$I = -\frac{9}{2} e^{-6} - \frac{3}{2} e^{-6} - \frac{1}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} = -\frac{25}{4} e^{-6} + \frac{1}{4}$$

$$2. a. \quad [f(x)]^2 = x^2 (e^{-x+2})^2 = x^2 e^{-2x+4} = x^2 e^{-2x} e^4$$

$$V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^3 x^2 e^{-2x} e^4 dx = \pi e^4 \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

$$V = \pi e^4 I$$

2. b. Le repère est orthonormal d'unité 4 cm donc une unité de volume est $4^3 = 64 \text{ cm}^3$

$$V = \pi e^4 \left(-\frac{25}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} \right) \text{ unités de volume donc } -\frac{25}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} = \pi e^4 \left(-\frac{25}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} \right) \times 64 \text{ cm}^3$$

$$V = 2574 \text{ cm}^3 \text{ à } 1 \text{ cm}^3 \text{ près.}$$