a) tout d'abord, f est continue sur $\mathbb{R}$, périodique, donc bornée sur $[0, 2\pi]$, et sur $\mathbb{R}$; conséquence : $t \to e^{-t} f(x+t)$ est continue par morceaux sur $I = \mathbb{R}+$, dominée au voisinage de $+\infty$ par exp(-t), intégrable sur I : G(f)(x) existe bien.
Ensuite : $f \to G(f)$ est linéaire.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ $G(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u+x} f(u)du = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)du$ (changement de variables affine u = t + x, donc C^1 et bijectif de $[x, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$) ; comme $u \to \exp(-u) f(u)$ est continue sur $J = \mathbb{R}$, $x \to \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(u)du - \int_0^x e^{-u} f(u)du$ est C^1 sur J , de dérivée $x \to - e^{-x} f(x)$; $x \to \exp(x)$ est C^1 sur I.

Conséquence : G(f) est C^1 sur I, 2π-périodique, donc élément de E. G est bien un endomorphisme de E.
Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.

b) Et $\forall x \in \mathbb{R}$ $G(f)'(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)du - e^x e^{-x} f(x)$ = G(f)(x) – f(x) ; G(f) est solution de (E) : y' – y = - f.

c) G n'est pas surjectif car pour tout $f \in E$, G(f) est C^1 ; les éléments de E qui sont continus mais pas C^1 sur $\mathbb{R}$ (par exemple $x \to |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ et 2π-périodiques) n'ont pas d'antécédent par G.

G est-il injectif ? soit $f \in E$/ G(f) = 0 ; alors G(f ') = 0 puis (en utilisant la question précédente): f = 0. Conclusion : G est injectif.

d) On cherche $f \neq 0$ / $G(f) = \lambda f$; on sait de plus que G(f)' – G(f) = - f
Si $\lambda = 0$, f = 0 (G injectif) ; on suppose à présent $\lambda \neq 0$. Donc $f = G(f)/\lambda$ est C^1 ; on peut dériver la 1° égalité : $\lambda f' - \lambda f = -f$ et $\lambda f' + (1-\lambda) f = 0$
C'est une équation différentielle linéaire du 1° ordre à coefficients constants de second membre nul. Comme $\lambda \neq 0$: f(x) = $a e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$ (a complexe). Problème : cette fonction est-elle 2π-périodique ? uniquement si $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ est un imaginaire pur, et multiple de 2π, ie il existe b entier tel que $\frac{\lambda-1}{\lambda} = i\,2\pi b$, soit $\lambda = \frac{1}{1-i2\pi b} = \frac{1+i2\pi b}{1+4\pi^2 b^2}$ (ce qui donne tout de même une infinité de valeurs propres)