INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS
L'usage de la calculatrice est **interdit** ainsi que tout document ou formulaire.
L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.
Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).
Toute réponse exacte rapporte un point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).
L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

EXERCICE N°1 Bases en Analyse.
Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a. La dérivée de $x \to x \times e^x$ est $x \to x\, e^x$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x - 1}{x} = +\infty$

c. Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

Soit A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que P(A) = 0,2, P(B) = 0,5 et P(A ∪ B) = 0,7.
d. A et B sont incompatibles.

EXERCICE N°2 Bases en Géométrie.
Pour le *a*) et *b*), on se place dans le plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Les questions *a*) et *b*) sont indépendantes.

a. Si $z = -6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

b. Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M' un point d'affixe $z' = -\bar{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à O.

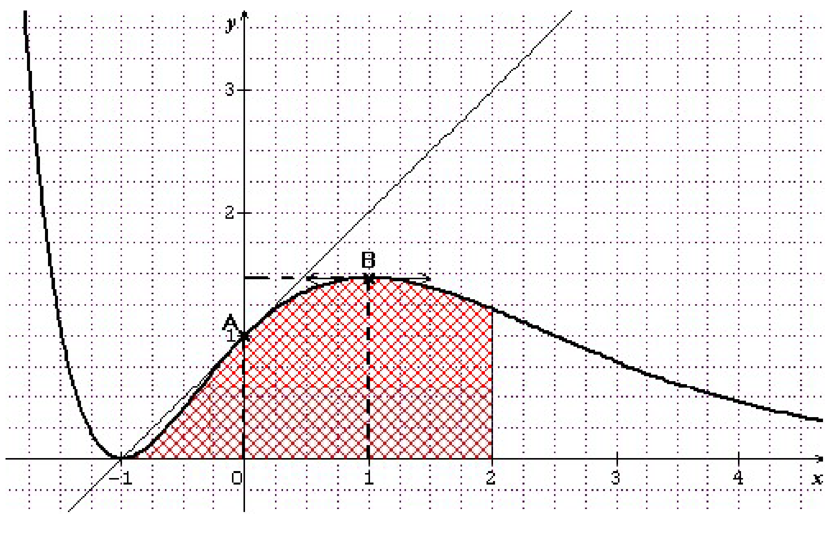
Pour le *c*) et *d*), on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x + 6y - 10z + 3 = 0$ et $-6x - 9y + 15z - 8 = 0$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = 5t - 1 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

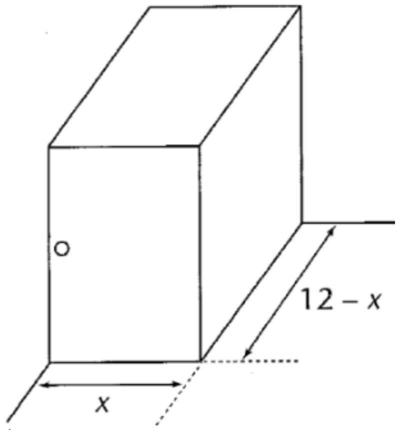
c. (P_1) et (P_2) sont sécants.
d. Le point A(2 ; 3 ; – 5) appartient à la droite (d).

EXERCICE N°3 Lecture graphique.
On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées (0 ;1).

a. $f'(0) = 1$.
b. $f'(1) = 1{,}5$.
c. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $[-1{,}5 ; 4]$.
d. $2 \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le 4$



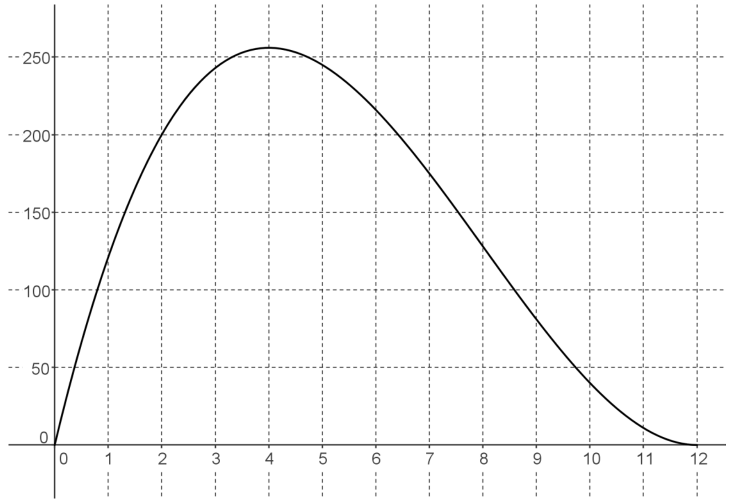
EXERCICE N°4 Volume d'un parallélépipède rectangle.



On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.
Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.
On suppose $x \in [0 ; 12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).

a. Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = (-12x + x^2) \times (x - 12)$.

On pose f la fonction définie sur $[0 ;12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$ de courbe représentative (C) ci-dessous.



b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 12]$, $f'(x) \geq 0$.

c. $V(x) = 2 \times f(x)$.

d. Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.

EXERCICE N°5 Utilisation d'une suite dans un algorithme.

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1$

On donne l'algorithme suivant :

Entrée : n est un entier naturel.
Initialisation : u prend la valeur 1
i prend la valeur 0.
Traitement : Tant que i < n
u prend la valeur $\frac{1}{2}(u - i) - 1$
i prend la valeur $i + 1$.
Sortie : Afficher u

a. Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-\frac{1}{2}$	1
3	$-\frac{7}{4}$	2
3	$-\frac{23}{4}$	3

b. Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} + n$.

EXERCICE N°6 Utilisation d'un algorithme avec les complexes.

On se place dans le plan complexe $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	θ est un nombre réel. *a* est un nombre réel. *b* est un nombre réel. *a*' est un nombre réel. *b*' est un nombre réel.
Initialisation :	*u* prend la valeur 1 i prend la valeur 0.
Traitement :	*a*' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$. *a*' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$. *b*' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$. *b*' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.
Sortie :	Afficher *a*'. *Afficher b'*

Pour le *a*) et *b*) on suppose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$.

a. $a' = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

b. $b' = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + \mathrm{i}\, b$ et M' le point d'affixe $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ avec *a*' et *b*' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c. Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$, alors . $|\, z' \,| = \sqrt{2}$

d. Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, z$

EXERCICE N°7 Bases de logique.

Pour le *a*) et *b*) on suppose *z* un nombre complexe et Γ un sous ensemble de ℂ.

a. $z \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

b. La contraposée de « si $z \in \Gamma$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ » est « si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Pour le *c*) et *d*) on suppose *f* une fonction définie sur $I = [-3 ; 5]$.

c. Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

d. Si *f* admet une primitive sur $I = [-3 ; 5]$ alors *f* est continue sur $I = [-3 ; 5]$.

EXERCICE N°8 Calculs de limites.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

c. Si, pour tout réel *x* non nul, $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{x^2+1}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$

EXERCICE N°9 Calculs d'intégrales.

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = 4 + 2 \times \sqrt{2}$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \ln(2)$

c. La fonction $x \to (x^2 - 2x + 2) \times \mathrm{e}^x - 2$ est une primitive définie sur ℝ de la fonction $x \to x^2 \times \mathrm{e}^x$.

d. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \times \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = 3e - 2$

EXERCICE N°10 Notions de bases sur les nombres complexes.

On se place dans le plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère A le point d'affixe $z_A = -2\,i$, B le point d'affixe $z_B = -2$ et E le point d'affixe $z_E = 2 + 2\,i\sqrt{3}$.

a. L'écriture trigonométrique de $2 + 2\,i\sqrt{3}$ est $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

b. E est situé sur le cercle de centre O et de rayon R = 2.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2\,i| = |2 + z|$ est la médiatrice du segment [AB].

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2\,z\,\bar{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

EXERCICE N°11 Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1 + \frac{i}{z}$.

a. L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1 + i$ est le point A' d'affixe $z_{A'} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i$.

Dans toute la suite, on pose $z = x + i\,y$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $z' = x' + i\,y'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$.

b. $\operatorname{Re}(z') = x' = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2}$

c. $\operatorname{Im}(z') = y' = -\frac{x}{x^2 + y^2}$

d. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tel que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $A\left(0 ; -\frac{1}{2} \right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$ privé du point O.

EXERCICE N°12 Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 - x^2)$. On note D l'ensemble de définition de f.

a. $1 - x^2 \geq 0$ si et seulement si $-1 \leq x \leq 1$.

b. D = [– 1 ; 1].

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

d. L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{e - 1}$ et $x = -\sqrt{e - 1}$.

EXERCICE N°13 Etude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{\left(e^{-x}(x^2 + 1) \right)^2}$.

d. f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

EXERCICE N°14 Bases en probabilités.

On considère, dans *a*), deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a. $P_{\bar{F}}(E) = 1 - P_F(E)$

Pour le *b*), *c*) et *d*), nous utiliserons les hypothèses suivantes :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne. Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition. Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition. On considère les événements suivants :

G : « Le joueur obtient le numéro 1 », B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b. $P(B \cap G) = \frac{5}{32}$

c. $P(G) = \frac{13}{32}$

d. $P_G(B) = \frac{5}{11}$

EXERCICE N°15 Différentes lois de probabilités.

a. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 5].

$P\left(1 \leq X \leq \dfrac{5}{2}\right) = 0,4$

b. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P\,(\,Y > c\,) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$

c. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$.

$P\,(\,T \leq 10\,) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

d. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathbf{N}\,(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$ et vérifiant $P\,(\,0 \leq Z \leq 2\,) = 0,75$.
La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathbf{N}\,(\,0\,;\,1\,)$.

EXERCICE N°16 Repérage dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2\,y + 3\,z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\begin{cases} x = 1 - 2\,t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

a. Le point A (– 1 ; 3 ; – 2) appartient à D.

b. Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées (– 3 ; 4 ; – 1).

c. La droite D', de représentation paramétrique $\begin{cases} x = k \\ y = -2\,k + 1 \\ z = k \end{cases}$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

d. Les droites D et D' sont coplanaires.

CORRECTION

EXERCICE N°1 Bases en Analyse.

a. **FAUX**

$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x} & v'(x) = e^{x} \end{cases}$ donc la dérivée de $x \to x \times e^{x}$ est $x \to e^{x} + x\,e^{x}$

b. **FAUX**

$\dfrac{\ln x - 1}{x} = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x - 1}{x} = 0$

c. **FAUX**

Soit $f(x) = e^{x}$, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, f ne s'annule pas sur R et $f' = f$.

d. **VRAI**

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) donc 0,2 + 0,5 – P(A ∩ B) = 0,7 soit P(A ∩ B) = 0. A et B sont incompatibles

EXERCICE N°2 Bases en Géométrie.

a. **FAUX**

$\arg(z) = \arg(-6) + \arg\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ donc $\arg(z) \equiv \pi + \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

b. **FAUX**

Il existe deux réels x et y tels que $z = x + i\,y$ donc $z + z' = z - \overline{z} = 2\,i\,y$

$y \neq 0$ donc $z + z' \neq 0$ donc O n'est pas le milieu de [MM'], les points M et M' ne sont pas symétriques par rapport à O.

c. **FAUX**

Un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées (4 ; 6 ; – 10).

Un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées (– 6 ; – 9 ; 15)

$3\overrightarrow{n_1}$ a pour coordonnées (12 ; 18 ; – 30).

$-2\,\overrightarrow{n_2}$ a pour coordonnées (12 ; 18 ; – 30).

$3\overrightarrow{n_1} = -2\,\overrightarrow{n_2}$, ces deux vecteurs sont colinéaires donc (P_1) et (P_2) sont parallèles.

d. **FAUX**

Le point A(2 ;3 ;-5) appartient à la droite (d).

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2\,t + 1 \\ y = -\,t - 3 \\ z = 5\,t - 1 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

Si $t = -6$ alors le point de (d) d'ordonnées 3 a pour coordonnées (– 11 ; 3 ; – 31) donc A n'appartient pas à la droite (d).

EXERCICE N°3 Lecture graphique.

a. **VRAI**

La tangente en A a pour coefficient directeur 1 donc $f'(0) = 1$.

b. **FAUX**

La tangente en B a pour coefficient directeur 0 donc $f'(1) = 0$.

c. **FAUX**

La droite d'équation $y = x$ coupe la courbe en 2 points d'abscisse – 1 et 0 sur [− 1,5 ;4].
L'équation $f(x) = x$ possède deux solutions sur [− 1,5 ;4].

d. **VRAI**

La fonction f est positive donc $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ mesure l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Cette aire est supérieure à l'aire du rectangle OACD où C est le point de coordonnées (1 ; 2) et D le point de coordonnées (2 ; 0) donc $2 \leq \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

Cette aire est inférieure à la somme des aires du rectangle OEFG et du triangle OAH où les points E, F, G et H ont pour coordonnées (0 ; 1,5) F (2 ; 1,5), G(2 ; 0), H(– 1 ; 1) donc $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq 2 \times 1{,}5 + \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1$ donc $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq 4$

EXERCICE N°4 Volume d'un parallélépipède rectangle.

a. **VRAI**

L'aire du rectangle de base est $(12 - x)\,x$ soit $-12\,x + x^2$. La profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur donc à $12 - x$ donc le volume du placard est $V(x) = (-12\,x + x^2) \times (x - 12)$.

b. **FAUX**

La fonction est décroissante sur [4 ; 12] donc sur cet intervalle $f'(x) \leq 0$.

c. **FAUX**

$V(x) = (-12\,x + x^2) \times (x - 12)$.

$V(x) = x^3 - 12\,x^2 - 12\,x^2 + 144\,x = x^3 - 24\,x^2 + 144\,x = f(x)$

d. **VRAI**

$V(x) = (-12\,x + x^2) \times (x - 12) = x\,(x - 12)^2$

Si $x = 12 - x$ soit $x = 6$ alors $V(x) = 6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216$, donc $200 \leq V(x) \leq 225$ ce qui pouvait se lire graphiquement.

EXERCICE N°5 Utilisation d'une suite dans un algorithme.

a. **FAUX**

n	u	i
3	1	0
3	$\frac{1}{2}(1-0)-1=-\frac{1}{2}$	1
3	$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)-1=-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$	2
3	$\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{4}-2\right)-1=-\frac{15}{8}-1=-\frac{23}{8}$	3

b. **VRAI**

Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

c. **VRAI**

$v_n = u_n + n$ donc $v_0 = u_0 = 1$, comme $v_n = u_n + n$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1 + n + 1$

En remplaçant u_n par $v_n - n$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - n - n) - 1 + n + 1$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d. **FAUX**

Si la propriété était vraie alors pour tout n, $u_n > 0$ or $u_1 < 0$ donc faux.

On pouvait exprimer u_n en fonction de n :

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$ donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ or $u_n = v_n - n = \frac{1}{2^n} - n$.

EXERCICE N°6 Utilisation d'un algorithme avec les complexes.

a. **FAUX**

$a = 1$ donc a' prend la valeur $1 \times \cos\frac{\pi}{3}$ soit $\frac{1}{2}$ puis a' prend la valeur $\frac{1}{2} - 1 \times \sin\frac{\pi}{3}$ soit $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $a' = \frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

b. **VRAI**

$b = 1$ donc b' prend la valeur $1 \times \sin\frac{\pi}{3}$ soit $\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis b' prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \cos\frac{\pi}{3}$ soit $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ donc $b' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

c. **VRAI**

$z' = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ donc $|z'|^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ donc $|z'|^2 = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{4} + \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4} = 2$ donc $|z'| = \sqrt{2}$

d. **VRAI**

$z' = a\cos(\theta) - b\sin(\theta) + i\,(a \times \sin(\theta) + b \times \cos(\theta))$

$e^{i\theta}\,z = (\cos\theta + i\sin\theta)(a + i\,b) = a\cos(\theta) - b\sin(\theta) + i\,(a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$ donc $z' = e^{i\theta}\,z$

EXERCICE N°7 Bases de logique.

a. **VRAI**

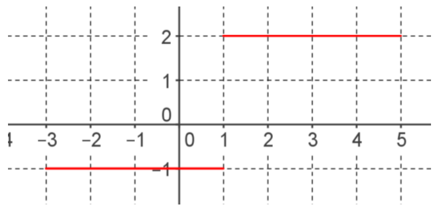
$z \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

b. **FAUX**

La contraposée de « si $z \in \Gamma$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ » est « si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ alors $z \notin \Gamma$ ».

c. **FAUX**

Soit f la fonction définie sur I par $\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 2 & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$,



On a bien $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ et f ne s'annule pas sur I.
Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ et f continue sur I alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

d. **FAUX**

Il existe des fonctions non continues sur I et admettant une primitive sur I.

EXERCICE N°8 Calculs de limites.

a. **FAUX**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

b. **FAUX**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$

c. **VRAI**

Si, pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d. **FAUX**

Soit $h = x - \dfrac{\pi}{2}$, donc $x = h + \dfrac{\pi}{2}$, $\sin x = \cos h$ donc $\dfrac{\sin x - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{-2\sin^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}$

Soit $u = \dfrac{h}{2}$ alors $\dfrac{-2\sin^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} = -\dfrac{\sin^2 u}{u} = -\dfrac{\sin u}{u} \times \sin u$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} h = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} u = 0$ or $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ et $\lim\limits_{u \to 0} \sin u = 0$ donc $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} \times \sin u = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}} = 0$

EXERCICE N°9 Calculs d'intégrales.

a. **FAUX**

$\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\,2\sqrt{x}\,\right]_2^4 = 4 - 2 \times \sqrt{2}$

b. **VRAI**

$\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\,\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

c. **VRAI**

Soit $\begin{cases} u(x) = x^2 - 2x + 2 & u'(x) = 2x - 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$ donc la dérivée de la fonction $x \longrightarrow (x^2 - 2x + 2) \times \mathrm{e}^x - 2$ est la fonction $x \longrightarrow (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + (2x - 2)\,\mathrm{e}^x$ soit la fonction $x \longrightarrow x^2 \times \mathrm{e}^x$.

d. **FAUX**

$\displaystyle\int_0^1 x^2 \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\,(x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x\,\right]_0^1 = \mathrm{e} - 2$

EXERCICE N°10 Notions de bases sur les nombres complexes.

a. **VRAI**

$\left| 2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3} \right|^2 = 4+4\times 3 = 16$ donc $\left| 2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3} \right| = 4$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ ($k \in$ Z) donc l'écriture trigonométrique de $2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ est $4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \right)$.

b. **FAUX**

$\left| 2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3} \right| = 4$ donc OE = 4 donc E est situé sur le cercle de centre O et de rayon R = 4.

c. **VRAI**

$\left| z+2\,\mathrm{i} \right| = \left| 2+z \right| \Leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow$ MB = MA

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left| z+2\,\mathrm{i} \right| = \left| 2+z \right|$ est la médiatrice du segment [AB].

d. **FAUX**

$2\,z\,\bar{z} = 1 \Leftrightarrow 2\,|z|^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{OM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2\,z\,\bar{z} = 1$ est un cercle de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE N°11 Utilisation des nombres complexes en géométrie.

a. **VRAI**

$z' = 1+\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 1+\dfrac{\mathrm{i}\,(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})} = 1+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1 + \mathrm{i}$ est le point A' d'affixe $z_{A'} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

$z' = 1+\dfrac{\mathrm{i}\,(x-\mathrm{i}\,y)}{(x+\mathrm{i}\,y)\,(x-\mathrm{i}\,y)} \Leftrightarrow z' = 1+\dfrac{y+\mathrm{i}\,x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow z' = \dfrac{x^2+y^2+y+\mathrm{i}\,x}{x^2+y^2}$

b. **VRAI**

$\mathrm{Re}\,(z') = x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$

c. **VRAI**

$\mathrm{Im}\,(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$

d. **VRAI**

$z \neq 0$ et z' imaginaire pur $\Leftrightarrow (x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$ et $\mathrm{Re}\,(z') = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow (x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$ et $x^2+y^2+y = 0 \Leftrightarrow (x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$ et

$x^2 + \left(y+\dfrac{1}{2} \right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ et $\mathrm{AM}^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ et $\mathrm{AM} = \dfrac{1}{2}$

M décrit le cercle (C) de centre $\mathrm{A}\left(0\,;-\dfrac{1}{2} \right)$ et de rayon $\mathrm{R} = \dfrac{1}{2}$ privé du point O.

EXERCICE N°12 Etude d'une fonction logarithme

a. **VRAI**

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Une expression du second degré $a\,x^2 + b\,x + c$ a le même signe que a entre les deux racines donc $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

b. **FAUX**

La fonction est définie pour x tel que $1 - x^2 > 0$ donc la fonction est définie si D =] – 1 ; 1 [.

c. **FAUX**

La dérivée de ln u est $\dfrac{u'}{u}$ donc la fonction f a pour fonction dérivée la fonction $f\,'$ définie sur D par $f\,'(x) = \dfrac{-2\,x}{1-x^2}$.

d. **FAUX**

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(1 - x^2) = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = \mathrm{e} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e} = x^2$ or $\mathrm{e} > 1$ donc $1 - \mathrm{e} < 0$ donc $x^2 \neq 1 - \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

EXERCICE N°13 Etude d'une fonction exponentielle.

a. **FAUX**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b. **VRAI**

$f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c. **VRAI**

$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{2x} & u'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} \\ v(x) = x^2+1 & v'(x) = 2x \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+1) - 2x\,\mathrm{e}^{2x}}{(x^2+1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2-x+1)}{\mathrm{e}^{-2x}(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2-x+1)}{\left(\mathrm{e}^{-x}(x^2+1)\right)^2}$.

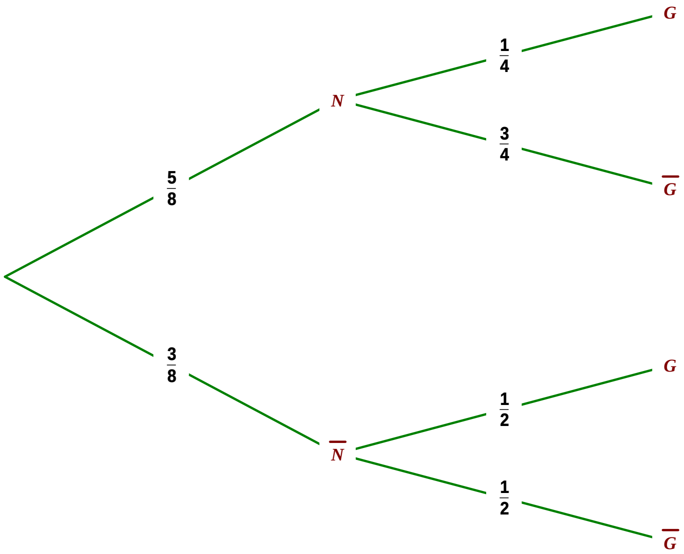
d. **FAUX**

$x^2 - x + 1$ ne s'annule pas sur R ($\Delta = -3$) donc pour tout x réel, $x^2 - x + 1 > 0$ donc pour tout x réel, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur R.

EXERCICE N°14 Bases en probabilités.

a. **FAUX**

$P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_{\overline{F}}(\overline{E})$



b. **VRAI**

$P(B \cap G) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{32}$

c. **FAUX**

$P(G) = P(B \cap G) + P(\overline{B} \cap G) = \dfrac{5}{32} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{32}$

d. **VRAI**

$P_G(B) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{\frac{5}{32}}{\frac{11}{32}} = \dfrac{5}{11}$

EXERCICE N°15 Différentes lois de probabilités.

a. **FAUX**

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2} - 1}{5 - 0} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$

b. **VRAI**

Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$

c. **VRAI**

$P(T \leq 10) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10} \times 10} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$

d. **VRAI**

Si Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$, $P(0 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 0) = P(Z \leq 2) - 0{,}5$
$P(Z \leq 1{,}96) = 0{,}975$ et $P(Z \leq 2{,}33) = 0{,}99$ donc $P(Z \leq 2)$ est approximativement compris entre 0,975 et 0,99
$P(Z \leq 2) - 0{,}5$ est approximativement compris entre 0,475 et 0,49 donc $P(0 \leq Z \leq 2) \neq 0{,}75$.
La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

EXERCICE N°16 Repérage dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + 3z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

a. **FAUX**

Le point de la droite D de paramètre $t = 1$ a pour abscisse -1 et pour coordonnées $(-1\,;1\,;-4)$ donc $A \notin D$

b. **FAUX**

Le point de la droite D de paramètre $t = 2$ a pour abscisse -3 et pour coordonnées $(-3\,;0\,;-5)$ donc $B \notin D$

c. **FAUX**

Le point d'intersection de la droite D' et du plan P (s'il existe) a des coordonnées de la forme $(k\,;-2k+1\,;k)$ qui vérifient l'équation du plan $x + 2y + 3z - 2 = 0$ donc $k + 2(-2k+1) + 3k - 2 = 0$ soit $0 = 0$
Tous les points de D' appartiennent au plan P donc D' est contenue dans ce plan.

d. **FAUX**

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}$ de coordonnées $(2\,;1\,;1)$
Un vecteur directeur de D' est $\vec{u'}$ de coordonnées $(1\,;-2\,;1)$
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc D et D' ne sont pas parallèles.
Cherchons si D et D' sont sécantes.
Si elles ne sont, leur point d'intersection vérifie :

$\begin{cases} x = 1 - 2t = k \\ y = 2 - t = -2k + 1 \\ z = -3 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - 2t \\ 2k = t - 1 \\ k = -3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - t = 1 - 2t \\ 2k = t - 1 \\ k = -3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ 2k = t - 1 \\ k = -7 \end{cases}$ or $2k \neq t - 1$ donc les deux droites ne sont pas sécantes

D et D' ne sont ni sécantes ni parallèles donc ne sont pas coplanaires.