On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer les propriétés suivantes de j :

a. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $j^3 = 1$ **c.** $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ **d.** $1 + j + j^2 = 0$

2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points M, N, P d'affixes respectives m, n, p.

a. Montrer que; si le triangle MNP est équilatéral direct, alors $m - n = -j^2(p - n)$.

b. Établir la propriété suivante : " Le triangle MNP est équilatéral direct si, et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$."

CORRECTION

1. *a.* $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. ***b.*** $-j^2 = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\pi} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}}$ or $\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3}$ donc $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$

1. *c.* $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$

1. *d.* $j^2 = -e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

2. *a.* Si le triangle MNP est équilatéral direct, M est l'image de P dans la rotation de centre N d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Cette rotation a pour expression complexe : $z' - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - n)$

r(P) = M donc $m - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(p - n)$ or $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc $m - n = -j^2(p - n)$.

2. *b.* Le triangle MNP est équilatéral direct $\Leftrightarrow$ M est l'image de P dans la rotation de centre N d'angle $\frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow m - n = -j^2(p - n)$ $\Leftrightarrow m - (1 + j^2)n + j^2 p = 0$ $\Leftrightarrow m + nj + pj^2 = 0$ puisque $1 + j + j^2 = 0$ ou encore que $1 + j^2 = -j$