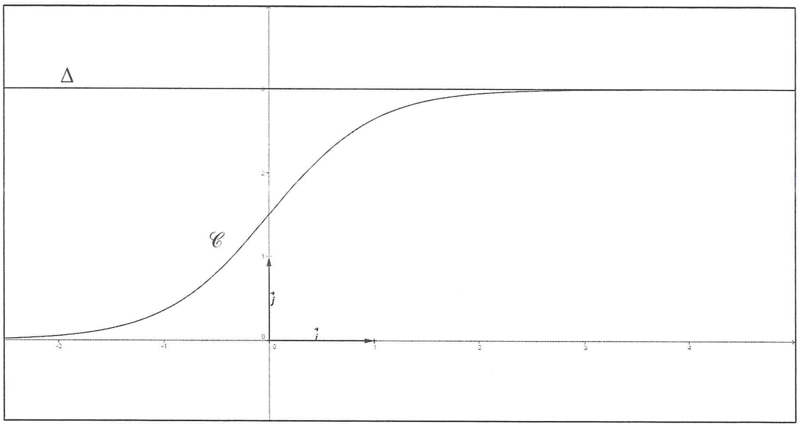
Pondichéry avril 2015

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$, la courbe représentative **C** de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe **C**.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{H}(x) = -\dfrac{3}{2}\ln(1 + \mathrm{e}^{-2x})$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note **D** l'ensemble des points M(x ; y) du plan défini par $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$.

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine **D**.

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = a\,u_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que, si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30$.

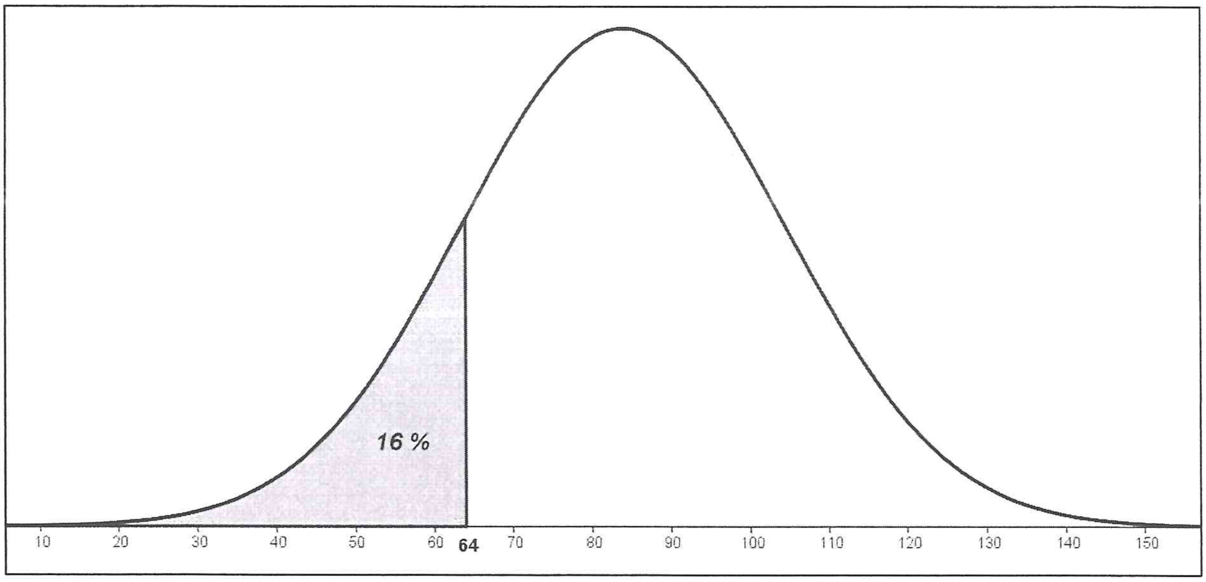
b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leq 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



a. En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.
b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
b. Justifier que $P(X \leq 64) = P\left(Z \leq \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5% d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, E1'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise E1'Ectro, grâce à l'extension de garantie.
a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.
b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise? Justifier.

EXERCICE 4 (5 points) Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$ on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\vec{n}$ (5 ; – 8 ; 4) normal au plan (MNP).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

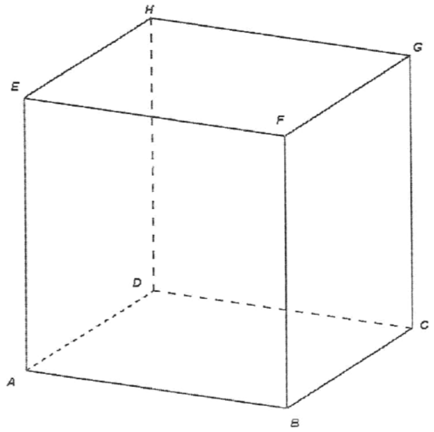
b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$

b. On donne $FK=\sqrt{\frac{27}{35}}$.

Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.



Algorithme 1

Saisir x_M, y_M' z_M, x_N, $y_{N\,P}$ z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir x_M, y_M' z_M, x_N, $y_{N\,P}$ z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés nombres de Mersenne.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD (b , c) = 1.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si b divise a et c divise a alors le produit $b\,c$ divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.

Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	286331130
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882.6
□	

Il affirme que 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ et 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

a. En quoi cette affirmation contredit elle le résultat démontré à la question 1.?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1$ [3], montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d. Calculer la somme $S = l + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + ... + (2^3)^{10}$.

e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD (N , k) représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation:	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2
Traitement:	Tant que MOD($2^n - 1$, k) $\neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie:	Afficher k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

CORRECTION

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1. f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$

La dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$ et la dérivée de e^u est u' e^u donc $f'(x)=\dfrac{-3\times(-2)\,e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$ soit $f'(x)=\dfrac{6\,e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, la droite Δ est asymptote à la courbe **C**.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

La fonction f est définie, continue, strictement croissant sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, $0 < 2{,}999 < 3$ donc l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$f(4) \approx 2{,}99899$ et $f(4{,}01) \approx 2{,}99901$ donc $f(4) < f(\alpha) < f(4{,}01)$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $4 < \alpha < 4{,}01$

Partie B

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ donc pour tout x réel, $f(x) \leq 3$ donc $3 - f(x) \geq 0$.

La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x})$.

H est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-2\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{3\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ or $h(x) = 3 - f(x) = 3-\dfrac{3}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3(1+e^{-2x})-3}{1+e^{-2x}}$

soit $h(x) = \dfrac{3\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = H'(x)$ donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. *a.* La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$, et $a > 0$ donc $\int_0^a h(x)\,dx$ mesure l'aire comprise entre la droite Δ, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$

b. $\int_0^a h(x)\,dx = H(a) - H(0) = -\dfrac{3}{2}\ln(1 + e^{-2a}) - \left(-\dfrac{3}{2}\ln(1+e^0)\right) = -\dfrac{3}{2}\ln(1 + e^{-2a}) + \dfrac{3}{2}\ln(2)$

$\int_0^a h(x)\,dx = \dfrac{3}{2}[\ln 2 - \ln(1 + e^{-2a})]$ donc $\int_0^a h(x)\,dx=\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c. L'aire, en unité d'aire, du domaine **D** est égale à la limite quand a tend vers $+\infty$ de $\int_0^a h(x)\,dx$ si elle existe, soit la limite $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-2a}}\right)$ or $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-2a}=0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-2a}}\right)=\dfrac{3}{2}\ln 2$ donc l'aire, en unité d'aire, du domaine **D** est $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats
Partie A

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a}$ donc $v_{n+1} = a\,u_n + b - \frac{b}{1-a}$ or $b - \frac{b}{1-a} = \frac{b(1-a)-b}{1-a} = -\frac{a\,b}{1-a}$ donc $v_{n+1} = a\,u_n - \frac{a\,b}{1-a}$

$v_{n+1} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$ soit $v_{n+1} = a\,v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison a donc pour tout n de N, $v_n = a^n\,v_0$.

Si a appartient à l'intervalle] – 1 ; 1 [, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \frac{b}{1-a} = 0$.

La suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. En mars 2015, la plante mesure 80 cm lors de l'achat. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante en coupant un quart de sa hauteur. Elle mesure alors $80 \times \frac{3}{4} = 60$ cm

La plante pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants donc en mars 2016, elle mesure 60 + 30 = 90 cm avant que Max ne la taille à nouveau.

2. *a.* en mars de l'année (2015 + n), la hauteur de la plante est h_n.

Max taille sa plante en coupant un quart de sa hauteur. Elle mesure alors $h_n \times \frac{3}{4} = 0{,}75\,h_n$

La plante pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants donc en mars de l'année (2015 + n + 1), elle mesure $0{,}75\,h_n + 30$ avant que Max ne la taille à nouveau.
Pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30$.

b. La suite (h_n) semble être croissante.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
h_n	80	90	97,5	103,13	107,34	110,51	112,88	114,66	116,00	117,00	117,75	118,31	118,73	119,05	119,29

Initialisation : $h_0 = 80$ et h_1 90 donc $h_1 > h_0$
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $h_{n+1} > h_n$ alors $h_{n+2} > h_{n+1}$
$h_{n+2} - h_{n+1} = 0{,}75\,h_{n+1} + 30 - (0{,}75\,h_n + 30) = 0{,}75\,(h_{n+1} - h_n)$
Par hypothèse de récurrence, $h_{n+1} > h_n$ donc $h_{n+1} - h_n > 0$ donc $h_{n+2} - h_{n+1} > 0$ soit $h_{n+2} > h_{n+1}$
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $h_{n+1} > h_n$, la suite (h_n) est croissante.

c. D'après la partie A, $h_0 = 80$ et $h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30$ donc h_n est de la forme $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a = 0{,}75$ et $b = 30$ donc la suite (h_n) converge vers $\frac{b}{1-a}$ soit vers $\frac{30}{1-0{,}25}$ donc vers 120.

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats
Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager
a. $P(64 \le X \le 104) = P(X \le 104) - P(X \le 64) = 1 - P(X \ge 104) - P(X \le 64)$
La fonction distribution a une courbe symétrique par rapport à la droite x = 84 donc $P(X \ge 104) = P(X \le 64) = 0{,}16$
$P(64 \le X \le 104) = 1 - 2 \times 0{,}16 = 0{,}68$

b. $P(84 - \sigma \le X \le 84 + \sigma) = 0{,}64 \Leftrightarrow 84 - \sigma = 64$ et $84 + \sigma = 104 \Leftrightarrow \sigma = 20$

2. *a.* Z suit une loi normale centrée réduite.

b. $X \le 64 \Leftrightarrow X - 84 \le -20$ or $\sigma > 0$ donc $X \le 64 \Leftrightarrow \frac{X-84}{\sigma} \le \frac{-20}{\sigma} \Leftrightarrow Z \le \frac{-20}{\sigma}$ donc $P(X \le 64) = P\left(Z \le \frac{-20}{\sigma}\right)$.

c. $P\left(Z \le \frac{-20}{\sigma}\right) = 0{,}16 \Leftrightarrow \frac{20}{\sigma} \approx 0{,}9944578 \Leftrightarrow \sigma \approx \frac{20}{0{,}9944578}$
La valeur de σ, arrondie à 10^{-3} est 20,111.

3. *a.* La durée de vie est calculée en mois donc $P(24 \le X \le 60) = 0{,}116$
b. La probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans est $P(X > 120) = 0{,}037$

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. *a.* On a une succession de 12 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- réussite : le client fait jouer cette extension de garantie (p = 0,115)
- échec : le client ne fait pas jouer cette extension de garantie (q = 1 – p = 0,885)

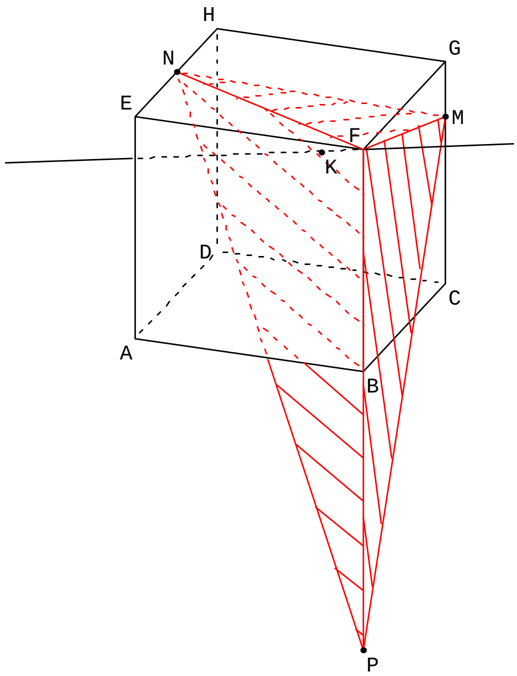
donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients faisant fait jouer cette extension de garantie suit une loi binomiale de paramètres (12; 0,115)
La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est $P(X = 3) \approx 0{,}111$

b. La probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est $P\ (X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$ soit environ 0,001.

2. *a.* Le client prend l'extension de garantie.
Soit le client fait fonctionner l'extension et on lui rembourse 399 € donc le gain algébrique est – 399 + 65 donc Y = – 334
Soit le client ne fait pas fonctionner l'extension et le gain algébrique est 65
Y prend les valeurs 65 et – 334.
$P(Y = -334) = 0{,}115$
$P(Y = 65) = 1 - 0{,}115 = 0{,}885$

b. $E(Y) = -334 \times 0{,}115 + 65 \times 0{,}885 = 19{,}115$
En moyenne l'entreprise gagne 19,115 € donc cette offre d'extension de garantie est financièrement avantageuse pour l'entreprise.

EXERCICE 4 (5 points) Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires.
Les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. *a.* L'algorithme affiche 0

Saisir $x_M, y_M{}' z_M, x_N, y_{N\,P}\, z_N, x_P, y_P, z_P$	
d prend la valeur $x_N - x_M$	$d = -1$
e prend la valeur $y_N - y_M$	$e = -0{,}5$
f prend la valeur $z_N - z_M$	$f = 0{,}25$
g prend la valeur $x_P - x_M$	$g = 0$
h prend la valeur $y_P - y_M$	$h = -1$
i prend la valeur $z_P - z_M$	$i = -2$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$	$k = 0 + 0{,}5 - 0{,}5$
Afficher k	$k = 0$

b. Le résultat affiché par l'algorithme correspond à $\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MP}$.
Comme $\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MP} = 0$, le triangle MNP est rectangle en M.

4.

Algorithme 2

Saisir $x_M, y_M{}' z_M, x_N, y_{N\,P}\, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
  Si $k = 0$ alors
    l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2 - (g^2 + h^2 + i^2)$
      Si $l = 0$ alors
        Afficher « le triangle est rectangle isocèle en M »
      Si $l \neq 0$ alors
        Afficher « le triangle est rectangle en M non isocèle »
    Sinon
      Afficher « le triangle n'est pas rectangle en M »

5. ***a.*** Le vecteur $\vec{n}$ (5 ; – 8 ; 4) est normal au plan (*MNP*) donc une équation cartésienne du plan (*MNP*) est de la forme $5x-8y+4z+d=0$.
N appartient au plan (*MNP*) donc 0 – 8 × 0,5 + 4 × 1 + *d* = 0 soit *d* = 0.
Une équation cartésienne du plan (*MNP*) est 5 *x* – 8 *y* + 4 *z* = 0

b. F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) donc une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = -8k \\ z = 4k+1 \end{cases}$ avec *k* ∈ R.

6. ***a.*** K est le point d'intersection du plan (*MNP*) et de la droite Δ donc les coordonnées de K sont de la forme $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = -8k \\ z = 4k+1 \end{cases}$ et vérifient 5 *x* – 8 *y* + 4 *z* = 0

$5(5k+1) - 8(-8k) + 4(4k+1) = 0 \Leftrightarrow 105k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{35}$

En remplaçant dans $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = -8k \\ z = 4k+1 \end{cases}$, les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7} ; \dfrac{24}{35} ; \dfrac{23}{35}\right)$

b. Le volume du tétraèdre *MNPF* est égal à $\dfrac{1}{3}$ Aire de base × hauteur

La droite (FK) est perpendiculaire au plan (*MNP*) donc [FK] est la hauteur issue de F du tétraèdre *MNPF.*

Le volume du tétraèdre *MNPF* est égal à $\dfrac{1}{3}$ Aire de $MNP \times FK$

Le triangle *MNP* est rectangle en M donc son aire est $\dfrac{1}{2}$ $MN \times MP$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ donc $MN^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16}$ donc $MN^2 = \dfrac{21}{16}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $MP^2 = 1 + 4 = 5$

L'aire du triangle *MNP* est $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{105}}{8}$

Le volume du tétraèdre *MNPF* est égal à $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{105}}{8} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{3}{8}$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. b divise a donc il existe un entier q tel que $a = b\,q$
c divise a alors donc c divise $b\,q$ or PGCD (b , c) = 1 donc d'après le théorème de Gauss, c divise q donc il existe un entier k tel que $q = c\,k$ donc $a = b\,c\,k$ or k est un entier donc le produit $b\,c$ divise a.

2. *a.* 3 et 4 sont premiers entre eux, 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ d'après la question 1. 12 divise $2^{33} - 1$.
Ce qui est en contradiction avec l'affirmation 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

b. $2^2 \equiv 0$ modulo 4 or $2^{33} = 2^2 \times 2^{31}$ donc $2^{33} \equiv 0 \times 2^{31}$ modulo 4 donc $2^{33} \equiv 0$ [4] donc $2^{33} - 1 \equiv -1$ [4]
4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c. $2 \equiv -1$ [3], donc $2^{33} \equiv (-1)^{33}$ [3] soit $2^{33} \equiv -1$ [3] donc $2^{33} - 1 \equiv -2$ [3] soit $2^{33} - 1 \equiv 1$ [3], 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ donc en appliquant ceci à $q = 2^3$ et $n = 10$: $S = \dfrac{(2^3)^{10+1} - 1}{2^3 - 1}$ soit $S = \dfrac{2^{33} - 1}{7}$

e. $S = \dfrac{2^{33} - 1}{7}$ donc $2^{33} - 1 = 7\,S$, S est un entier naturel donc 7 divise $2^{33} - 1$.

3. $2^7 - 1 = 127$
$11 < \sqrt{127} < 12$ or 127 n'est divisible pas par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 donc le nombre de Mersenne $2^7 - 1$ est premier.

4. *a.* $n = 33$

k	2	3	4	5	6	7
MOD($2^{33} - 1$, k)	1	1	3	1	1	0
Affichage						Cas 2

$n = 7$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
MOD($2^7 - 1$, k)	1	1	3	2	1	1	7	1	7	6
Affichage										Cas 1

b. CAS 2 correspond au cas où le nombre de Mersenne étudié n'est pas premier (divisible par k)
c. CAS 1 correspond au cas où le nombre de Mersenne étudié est premier (divisible par aucun nombre entier compris entre 2 et $\sqrt{2^n - 1}$)