Nouvelle-Calédonie mars 2012

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur C par $P(z) = z^3 - (2 + \mathrm{i}\sqrt{2})\, z^2 + 2\,(1 + \mathrm{i}\sqrt{2})\, z - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. *a.* Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})\,(z^2 + a\,z + b)$.

b. En déduire les solutions dans C de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. *a.* Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la ·boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

VRAI ou FAUX?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. Énoncé 1 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.

Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 *: «On peut choisir la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. »

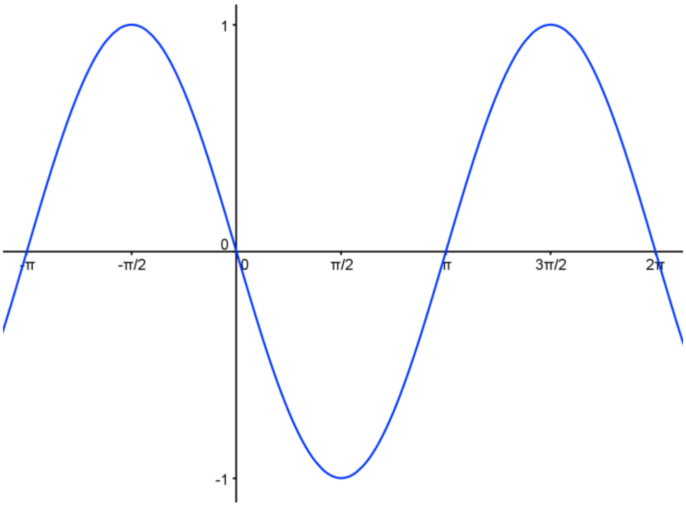
2. Énoncé 2 : Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2 i n \pi}{3}}$.

Proposition 2 *: « Les points O,* M_1 *et* M_{20} *sont alignés. »*

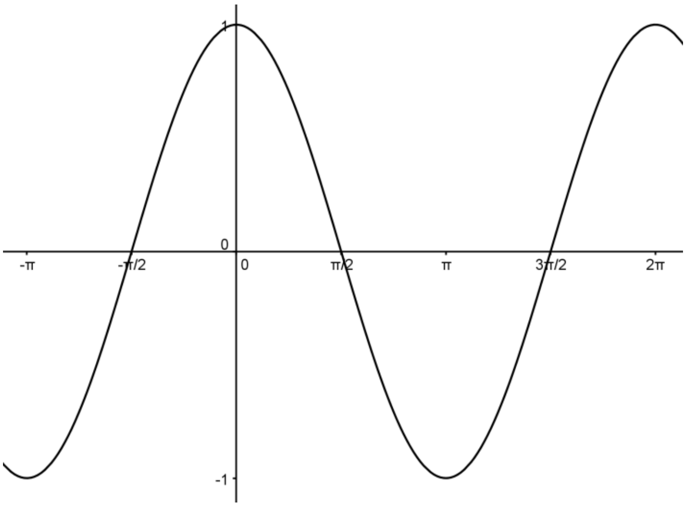
3. Énoncé 3 : On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de* f *».*

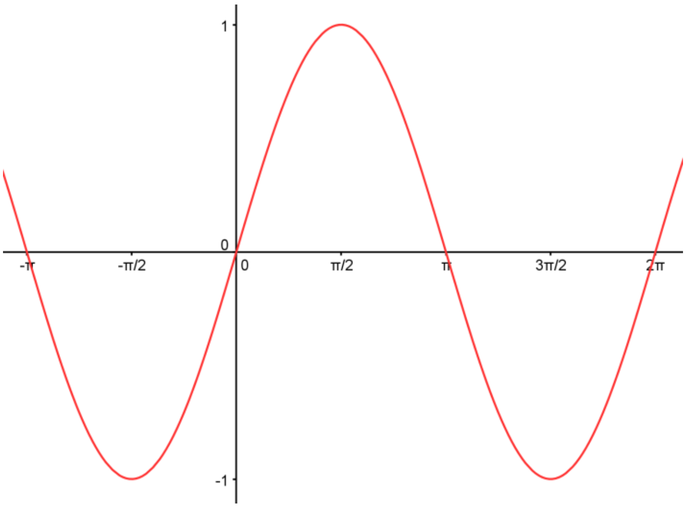
Courbe 1



Courbe 2

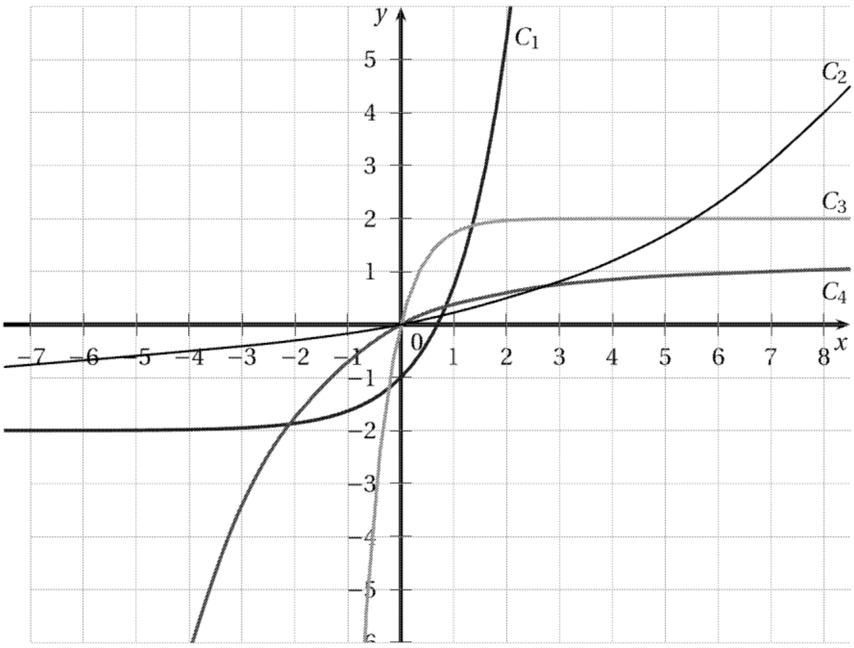


Courbe 3



4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.
Proposition 4 : « La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants. »

5. **Énoncé 5 :** On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.
Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe C_4. »



EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x\,e^{x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

Sur la courbe C , tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe C .On a placé les points A'(a ; 0) et B'(1 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x}\,dx = 1$.

2. *a*. Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\dfrac{1}{2}(-a^2\,e^{a} + a\,e^{a} - a\,e + e)$.

***b*.** En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}(a\,e^{a} - a\,e + e - 2)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = x(e^{x} - e) + e - 2$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de [0 ; + ∞ [.

Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur [0 ; + ∞ [par $g''(x) = (2 + x)\,e^{x}$.

2. En déduire les variations de la fonction g' sur [0 ; + ∞ [.

3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; + ∞ [.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

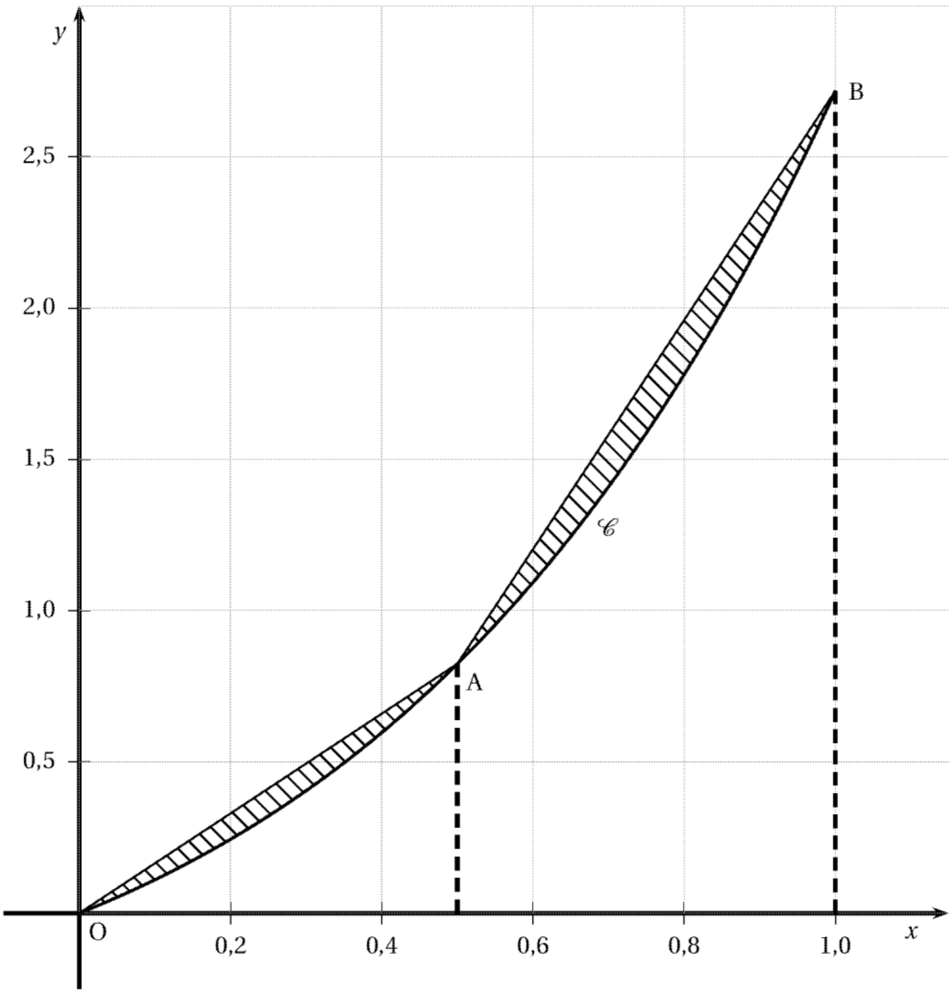
4. En déduire les variations de la fonction g sur [0 ; + ∞ [.

5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.

Donner cette valeur de a.

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A :

1. $z_0^{\,2} = -2$ et $z_0^{\,3} = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $P(z_0) = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})(-2) + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})(\mathrm{i}\sqrt{2}) - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

$P(z_0) = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

$P(z_0) = 0$ donc le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. *a.* $(z - \mathrm{i}\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + (a - \mathrm{i}\sqrt{2})z^2 + (b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a)z - \mathrm{i}\sqrt{2}\,b$

donc $\begin{cases} a - \mathrm{i}\sqrt{2} = -2 - \mathrm{i}\sqrt{2} \\ b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a = 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2}\,b = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} \end{cases}$ les lignes (1) et (3) donnent : $a = -2$ et $b = 2$

vérification : $b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$, la ligne (2) est donc vérifiée donc $P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})(z^2 - z + 2)$

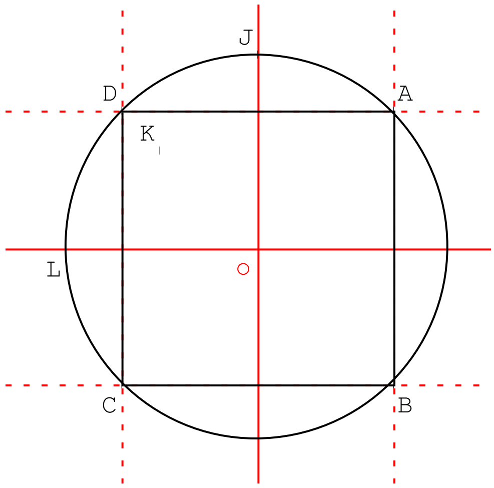
b. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i}\sqrt{2})(z^2 - z + 2) = 0 \Leftrightarrow z - \mathrm{i}\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 - z + 2 = 0$

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z - 1 = \mathrm{i}$ ou $z - 1 = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$ ou $z = 1 - \mathrm{i}$

Les solutions dans C de l'équation $P(z) = 0$ sont donc $\mathrm{i}\sqrt{2}$; $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

Partie B :

1.



2. $z_K = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K est le milieu de [JL] donc $z_K = \dfrac{1}{2}(z_L + z_J)$

donc $z_L = 2z_K - z_J = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

L'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. OA $= |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, OB $= |1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$; OJ $= |\mathrm{i}\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ et OL $= |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ donc OA = OB = OJ = OL $= \sqrt{2}$ donc les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. *a.* r est la rotation r de centre O qui transforme J en D donc l'angle de la rotation r est $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD})$

$(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}) = \arg\left(\dfrac{z_D}{z_J}\right)$ or $\dfrac{z_D}{z_J} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Une mesure de l'angle de la rotation r est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. La rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe $z' = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z$ soit $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

donc l'affixe de C image de L par r est $z_C = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (-\sqrt{2}) = -1 - \mathrm{i}$

5. $z_C = -z_A$ et $z_D = -z_B$ donc les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu O donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

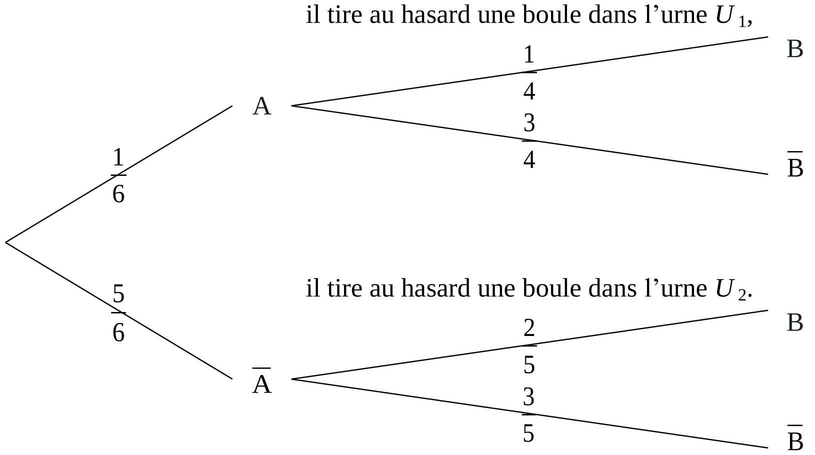
OD $= |-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc le triangle ACD est inscrit dans le cercle de centre O de rayon $\sqrt{2}$, de diamètre [AC] donc le triangle ACD est rectangle en D donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.

AB $= |1 - \mathrm{i} - (1 + \mathrm{i})| = |-2\,\mathrm{i}| = 2$

BC $= |1 - \mathrm{i} - (-1 - \mathrm{i})| = |2| = 2$ donc le rectangle ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un carré.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. ***a.***



b. La probabilité d'obtenir une boule noire est $p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{5 + 10 \times 4}{6 \times 4 \times 5} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$.

c. $p(A / B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{9}$

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la ·boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

On a une succession de 10 parties identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

réussite : la partie est gagnée (la ·boule obtenue est noire donc $p = \frac{3}{8}$)

échec : la partie n'est pas gagnée (la ·boule obtenue n'est pas noire donc $q = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$).

donc la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées suit une loi binomiale de paramètres $(10 ; \frac{3}{8})$

a. La probabilité de gagner exactement trois parties est $p(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^5 = 0{,}236$.

b. La probabilité de gagner au moins une partie est $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^8 = 0{,}991$.

c.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9
$P(X \geq k)$	0,990 9	0,936 3	0,789 0	0,553 3	0,305 7	0,127 5	0,038 4	0,007 8	0,001 0	0,000 1

D'après le tableau, si N ≥ 7 alors la probabilité l'évènement : « la personne gagne au moins *N* parties » est inférieure à $\frac{1}{10}$.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

VRAI ou FAUX?

1. VRAI

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc si $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$, la fonction sinus est continue sur R donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(a_n) = \sin\frac{\pi}{4}$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. FAUX

M_1 est le point d'affixe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, M_{20} est le point d'affixe $e^{\frac{2 \times 20 i\pi}{3}} = e^{\frac{40 i\pi}{3}} = e^{14 i\pi}\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ $(40 = 42 - 2 = 3 \times 14 - 2)$

donc M_{20} est le point d'affixe $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc M_{20} et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

3. Énoncé 3 : On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

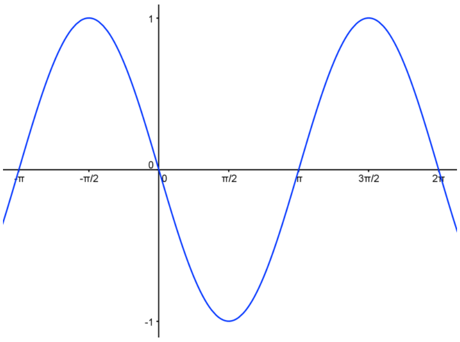
Proposition 3 : « La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f ».

La fonction F s'annule en 0 donc sa courbe représentative est soit la courbe 1 soit la courbe 3, de plus F étant une primitive de f alors $F' = f$

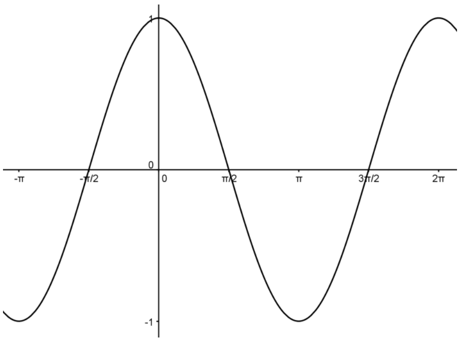
Si la courbe 3 représente la fonction f, alors la courbe 1 représente F.

f est alors positive sur $[0 ; \pi]$, or $f = F'$ donc F est croissante sur $[0 ; \pi]$ ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe 1 donc la courbe 3 représente F, F est alors croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc sa dérivée f est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc la courbe représentative de f est la courbe 2 donc par élimination la courbe représentative de f' est la courbe 1.

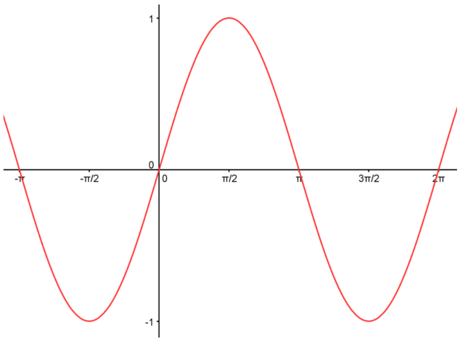
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



4. VRAI

La distance du point A au plan P est égale à $d = \frac{|2 \times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

Le rayon de la sphère est supérieur à la distance du centre au plan $\frac{3}{\sqrt{6}} < 2$ donc la sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants.

5. Énoncé 5 : On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe C4. »

l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y + b$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = C\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

L'équation différentielle (E) : $y' = -2\,y + 4$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = C\,e^{-2x} + 2$

La seule solution telle que $y(0) = 0$ est telle que $C + 2 = 0$ donc est la fonction définie par $f(x) = -2\,e^{-2x} + 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $f(-1) < -12$ donc la courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe C_3.

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1. Par intégration par parties, en posant $\begin{cases} u'(x) = e^x & u(x) = e^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[x\,e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[x\,e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1$ = e – (e – 1) = 1.

2. *a.* La fonction f est positive sur [0 ; 1] donc l'aire du triangle OAA' est égale $\frac{1}{2}$OA' × AA' = $\frac{1}{2} a\,f(a) = \frac{1}{2} a^2\,e^a$

L'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{\text{AA'} + \text{BB'}}{2} \times \text{A'B'} = \frac{1}{2}(f(a) + f(1)) \times (1 - a) = \frac{1}{2}(a\,e^a + e)(1 - a)$, en développant : l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}(-a^2\,e^a + a\,e^a - a\,e + e)$.

b. En décomposant l'aire hachurée en une somme de deux aires :

L'aire de la partie du plan hachurée est égale à $A_{OAA'} + A_{ABB'A'} - \int_0^1 x\,e^x\,dx = \frac{1}{2} a^2\,e^a + \frac{1}{2}(-a^2\,e^a + a\,e^a - a\,e + e) - 1$.

L'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(a\,e^a - a\,e + e) - 1$ soit $\frac{1}{2}(a\,e^a - a\,e + e - 2)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

1. e est une constante donc $\begin{cases} u(x) = e^x - e & u'(x) = e^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $g'(x) = (e^x - e) + x\,e^x = e^x(1 + x) - e$

si $\begin{cases} u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ v(x) = 1 + x & v'(x) = 1 \end{cases}$ alors $g''(x) = e^x(1 + x) + e^x$ donc $g''(x) = (2 + x)\,e^x$.

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur R, $x \geq 0$ donc $2 + x > 0$ donc $g''(x) > 0$, la fonction g' est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

3. $g'(0) = 1 - e$ donc $g'(0) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} e^x(1 + x) - e = +\infty$ soit $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$

la fonction g' est définie, strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, g'([0 ; + ∞ [) = [1 – e ; + ∞ [donc 0 ∈ g'([0 ; + ∞ [) ; donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; + ∞ [.

$g'(0{,}5) \approx -0{,}245$ et $g'(0{,}6) \approx 0{,}197$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$, une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,6.

4. g' est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, et $g'(\alpha) = 0$ donc si $0 \leq x < \alpha$ alors $g'(x) < 0$ et si $x > 0$ alors $g'(x) > 0$

x	0		α		+ ∞
$g'(x)$		–	0	+	
g	– 2	↗	$g(\alpha)$	↘	+ ∞

5. L'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(a(e^a - e) + e - 2)$ soit $\frac{1}{2} g(a)$.

D'après la partie B, la fonction g admet un minimum en α donc l'aire de la partie du plan hachurée est minimale quand $a = \alpha$.