Équations paramétriques

Pour $m \in \mathbb{R} - \{2\}$, on considère l'équation (E_m): $(m-2)x^2 + 2(m-1)x + m + 1 = 0$

Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le nombre des solutions de cette équation.

Solution : Lorsque $m - 2 \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $m \neq 2$, l'équation est du second degré car de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = m-2 \\ b = 2(m-1) \\ c = m+1 \end{cases}$.

Le nombre de solutions de l'équation sera déterminé par le signe de son discriminant.

$\Delta < 0 \iff$ le trinôme n'a pas de racine
$\Delta > 0 \iff$ le trinôme admet deux racines
$\Delta = 0 \iff$ le trinôme admet une seule racine

Ici $\Delta = b^2 - 4ac = \left[2(m-1)\right]^2 - 4(m-2)(m+1)$

$= 4(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 + m - 2m - 2) = -4m + 12$

$\Delta > 0 \iff -4m + 12 > 0 \iff m < 3$

Discuter suivant les valeurs de m signifie que l'on va donner, selon les valeurs prises par m dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation (E_m).

Pour $m \in \left]-\infty;2\right[\cup \left]2;3\right[$: $\Delta > 0$ et donc l'équation (E_m) admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-2(m-1) - \sqrt{-4m+12}}{2(m-2)} = \frac{-m+1-\sqrt{-m+3}}{m-2}$$

et $$x_2 = \frac{-2(m-1) + \sqrt{-4m+12}}{2(m-2)} = \frac{-m+1+\sqrt{-m+3}}{m-2}$$

Les racines dépendent du paramètre m

Pour $m = 3$: $\Delta = 0$ et donc l'équation $(E_m) = (E_3)$: $x^2 + 4x + 4 = 0$ admet une unique solution $x = -2$

Pour $m \in \left]3;+\infty\right[$: $\Delta < 0$ et donc l'équation (E_m) n'admet pas de solutions.

Autre exemple : (plus dur…)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (E_m) : $x^2 + (m-2)x + m + \frac{13}{4} = 0$

Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le nombre des solutions de cette équation.

Solution : (E_m) étant une équation du second degré, déterminons d'abord son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4\left(m + \frac{13}{4}\right)$$
$$= m^2 - 4m + 4 - 4m - 13$$
$$= m^2 - 8m - 9$$

Le signe du discriminant Δ dépend du paramètre m. C'est une expression du second degré d'inconnue m pour laquelle on doit déterminer son signe. Calculons le discriminant de ce discriminant !

$$\Delta_0 = b^2 - 4ac = (-8)^2 + 36 = 100 > 0 \quad \text{donc deux racines}$$
$$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-10}{2} = -1$$
$$m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+10}{2} = 9$$

Le trinôme du second degré $m^2 - 8m - 9$ possède donc deux racines, et il est du signe de $a = 1$, donc positif, pour tout réel m situé à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
$\Delta = m^2 - 8m - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent :

Si $m \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]9;+\infty\right[$ $\Delta > 0$ et donc l'équation (E_m) admet deux solutions.

Si $m \in \left]-1;9\right[$: $\Delta < 0$ et donc l'équation (E_m) n'admet pas de solutions.

Si $m \in \{-1; 9\}$: $\Delta = 0$ et donc l'équation (E_m) admet une unique solution.