Nouvelle Calédonie mars 2007

EXERCICE 1 5 points   Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. <u>Question de cours :</u> Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
2. On considère les points A(1 ; 2 ; – 3), B(– 3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; – 1).

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées (– 5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2 4 points   Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'*est demandée.*

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'*absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif la note est ramenée à* 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a.	$\dfrac{\binom{14}{3}}{\binom{18}{3}}$	b.	$\dfrac{9}{8}$	c.	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	d.	$\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a.	0	b.	$\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$	c.	$\dfrac{23}{128}$	d.	$\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque

a.	$m = -1$	b.	$m = \dfrac{1}{2}$	c.	$m = e^{\frac{1}{2}}$	d.	$m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a.	$1 - \dfrac{1}{e}$	b.	$\dfrac{1}{e}$	c.	$\dfrac{1}{5\,e}$	d.	$\dfrac{1}{0{,}2}(e-1)$

EXERCICE 3 5 points   Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(a\,n + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p.

Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

A. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

B. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

C. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. *a.* Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(n) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

***f*.** Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. Le plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a, b, c)$ passant par le point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{n} = 0$ donc $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$ soit $a\,x + b\,y + c\,z = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0$

2. On considère les points A(1 ; 2 ; – 3), B(– 3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; – 1).

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées (– 4 ; – 1 ; 7) et (1 ; 4 ; 2) donc ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan.

b. Les coordonnées de A vérifient : $2 \times 1 - 2 - 3 + 3 = 0$ donc A appartient au plan d'équation $2\,x - y + z + 3 = 0$.
Les coordonnées de B vérifient : $2 \times (-3) - 1 + 4 + 3 = 0$ donc B appartient au plan d'équation $2\,x - y + z + 3 = 0$.
Les coordonnées de C vérifient : $2 \times 2 - 6 - 1 + 3 = 0$ donc C appartient au plan d'équation $2\,x - y + z + 3 = 0$.
Les points A, B et C déterminent un plan, donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $2\,x - y + z + 3 = 0$.

c. Le vecteur de coordonnées (2 ; – 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC) donc est un vecteur directeur de la droite D.
D est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel t : $\overrightarrow{IM} = t\,\vec{n}$.

Un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC) est $\begin{cases} x = -5 + 2\,t \\ y = 9 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

d. J appartient à D donc il existe un réel t tel que les coordonnées de J soient $(-5 + 2\,t\,;\,9 - t\,;\,4 + t)$
J appartient au plan (ABC) donc $2\,(-5 + 2\,t) - (9 - t) + 4 + t + 3 = 0$ soit $6\,t - 12 = 0$ donc $t = 2$
Les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC) sont (– 1 ; 7 ; 6)

e. la droite D passe par I et perpendiculaire au plan (ABC), le point J, intersection de la droite D et du plan (ABC) est la projection orthogonale de I sur le plan (ABC).
La distance du point I au plan (ABC) est IJ or $IJ^2 = (-1 + 5)^2 + (7 - 9)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 4 + 4 = 24$ donc $IJ = 2\sqrt{6}$

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Question 1 :Réponse *c*
le nombre de cas possibles est 8^3, le nombre de cas favorables est 4^3 donc la probabilité de tirer trois boules noires est :
$\dfrac{4^3}{8^3} = \left(\dfrac{4}{8}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

Question 2 : **Réponse *d***

La probabilité de tirer 3 boules blanches, est $\dfrac{3^3}{8^3} = \dfrac{27}{8^3}$, la probabilité de tirer 3 boules rouges, est $\dfrac{1^3}{8^3} = \dfrac{1}{8^3}$

La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur, est $\dfrac{64}{8^3} + \dfrac{27}{8^3} + \dfrac{1}{8^3} = \dfrac{92}{8^3}$

Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

$$\frac{p\,(\text{3 boules rouges})}{p\,(\text{3 boules de la même couleur})} = \frac{\dfrac{1}{8^3}}{\dfrac{92}{8^3}} = \frac{1}{92}$$

Question 3 : **Réponse *b***

f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque, $f\,(x) \geq 0$ sur [0 ; 1] et $\displaystyle\int_0^1 f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$

$\displaystyle\int_0^1 f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}\,x^2 + m\,x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + m$ donc $\dfrac{1}{2} + m = 1$ soit $m = \dfrac{1}{2}$, $m < 0$ donc $x + m > 0$ pour tout x de [0 ; 1].

Question 4 : **Réponse *b***

X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$ donc $p(X \leq 5) = \displaystyle\int_0^5 \lambda\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = 1 - e^{-5\lambda}$ donc $p(X > 5) = e^{-5\lambda}$

La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est : $e^{-5\lambda} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Si $a = 0$, alors pour tout n, $a\,n + b = b$
Toutes les lettres de l'alphabet sont associées au même nombre donc seront codées par la même lettre.

2. Si $a = 13$, on associe l'entier b à A et $2 \times 13 + b$ à la lettre C
Le reste de la division par 26 de b et $26 + b$ est le même donc les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. *a.* si $5\,n + 2$ et $5\,p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $5\,n + 2 \equiv 5\,p + 2\ [\,26\,]$ donc $5\,(n - p) \equiv 0\ [\,26\,]$
donc 26 divise $5\,(n - p)$ or 26 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 26 divise $n - p$.
$n - p$ est un multiple de 26.
$0 \le n \le 25$ et $0 \le p \le 25$ donc $-25 \le -p \le 0$ d'où $-25 \le n - p \le 25$
Le seul multiple de 26 compris entre -25 et 25 est 0 donc $n - p = 0$ soit $n = p$

b.

Lettre	Nombre associé n	$5\,n + 2$	reste de la division de $5\,n + 2$ par 26	lettre associée
A	0	2	2	C
M	12	62	10	K
I	8	42	16	Q

Le mot AMI est codé par CQK.

4. *a.* La lettre E est associée au nombre 4, ce nombre est le reste de la division de $5\,x + 2$ par 26 où x est un entier inconnu associé à la lettre cherchée, $0 \le x \le 25$.

Lettre	Nombre associé n	$5\,n + 2$	reste de la division de $5\,n + 2$ par 26	lettre associée
?	x	$5\,x + 2$	4	E

donc $5\,x + 2 \equiv 4\ [\,26\,]$ soit il existe un entier relatif y tel que $5\,x + 2 = 26\,y + 4$
Il faut donc résoudre $5\,x - 26\,y = 2$ avec $y \in \mathbb{Z}$, et $x \in \Omega$.

***b.* A** $5 \times (-10) - 26 \times (-2) = -50 + 52 = 2$ donc $(-10\,;\,-2)$ est solution de $5\,x - 26\,y = 2$.

b. B. $\begin{cases} 5\,x - 26\,y = 2 \\ 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :
$5\,(x + 10) - 26\,(y + 2) = 0$
soit $5\,(x + 10) = 26\,(y + 2)$ donc 5 divise $26\,(y + 2)$ or 5 et 26 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y + 2$. Il existe un entier relatif k tel que $y + 2 = 5\,k$ donc en remplaçant dans $5\,(x + 10) = 26\,(y + 2)$, $x + 10 = 26\,k$
donc $y = 5\,k - 2$ et $x = 26\,k - 10$
Vérification :
s'il existe un entier relatif k tel que $y = 5\,k - 2$ et $x = 26\,k - 10$ alors $5\,x - 26\,y = 5 \times 26\,k - 5 \times 10 - 26 \times 5\,k + 26 \times 2 = 2$
donc les solutions de (E') sont les couples $(26\,k - 10\,;\,5\,k - 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. C. En déduire qu'il existe un unique couple $(x\,;\,y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.
Si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $5\,x - 26\,y = 2$ alors il existe un entier relatif k tel que $x = 26\,k - 10$ et $y = 5\,k - 2$.
$0 \le x \le 25$ donc $10 \le 26\,k \le 35$ donc $k = 1$ donc $x = 16$ et $y = 3$

c. Pour décoder E, il faut trouver x tel que $0 \le x \le 25$ et $5\,x - 26\,y = 2$ donc $x = 16$ d'après les questions précédentes.

Lettre	Nombre associé n	$5\,n + 2$	reste de la division de $5\,n + 2$ par 26	lettre associée
Q	16	82	4	E

La lettre E est décodée par Q.

EXERCICE 4 7 points **Commun à tous les candidats**

PARTIE A

1. $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} .= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n}$ or $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n+2+2n+1}{(2n+1)(2n+2)} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n(4n+3)-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$

$\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{4n^2+3n-(4n^2+4n+2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$ donc $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$

pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2. $n \geq 1$ donc $-3n-2 < 0$ et $n(2n+1)(2n+2) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

3. pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n > 0$ donc (u_n) est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

PARTIE B

1. *a.* Tout entier naturel n non nul, si $n \leq x \leq n+1$ alors $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$ les fonctions $x \to \dfrac{1}{n}$; $x \to \dfrac{1}{x}$ et $x \to \dfrac{1}{n+1}$ sont continues sur $[n\,;\,n+1]$ et $n < n+1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$.

b. $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$f(n) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ donc $\dfrac{1}{n} - f(n) = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$

c. Pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} - f(n) \leq \dfrac{1}{n}$ soit $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \leq -f(n) \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}$

$\dfrac{-1}{n(n+1)} \leq -f(n) \leq 0$ donc $0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. *a.* En écrivant successivement $0 \leq f(k) \leq \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour les valeurs de k comprises entre n et $2n$:

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)} \\ 0 \leq\ & f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ & \ldots \\ 0 \leq\ & f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)} \end{aligned}$$

En ajoutant terme à termes : pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$

b. pour tout réel x distinct de -1 et de 0, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$, donc $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$ donc pour tout réel x distinct de -1 et de 0, $(a+b)x + a = 1$ donc $a+b = 0$ et $a = 1$ soit $a = 1$ et $b = -1$

pour tout réel x distinct de -1 et de 0, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

c. En écrivant successivement $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ pour les valeurs de x entières comprises entre n et $2n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} \\ \frac{1}{2n(2n+1)} &= \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

En ajoutant terme à termes : pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

d. pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le S_n$ or $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} f(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = 0$

e. En écrivant successivement $f(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)$ pour les valeurs de n entières comprises entre n et $2n$:

$$\begin{array}{rcccccc} f(n) & = & \frac{1}{n} & + & \ln(n) & - & \cancel{\ln(n+1)} \\ f(n+1) & = & \frac{1}{n+1} & + & \cancel{\ln(n+1)} & - & \cancel{\ln(n+2)} \\ & & & + & & & \\ f(2n) & = & \frac{1}{2n} & + & \cancel{\ln(2n)} & - & \ln(2n+1) \end{array}$$

En ajoutant terme à termes : pour tout entier naturel n non nul, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n + \ln n - \ln(2n+1)$

soit $f(n) = u_n - [\ln(2n+1) - \ln n] = u_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ donc pour tout entier $n \ge 1$, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

f. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.