EXERCICE 1

On pose $I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p \, dx$ où p est un entier naturel non nul.

1 : *a*) Calculez I_1 (On pourra faire une intégration par parties)

b) Montrez que pour tout entier naturel non nul : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$

c) Déduisez-en I_2 , puis I_3.

2 : On considère la suite (I_p) , p entier ≥ 0.

a) Montrez que cette suite est décroissante.

b) Etablissez la convergence de cette suite vers une limite $L \geq 0$.

3 : *a*) Montrez qu'il y a contradiction entre le fait que L soit strictement positive et la relation obtenue dans 1 : *b*).

b) Déduisez-en alors la limite de la suite (I_p)

CORRECTION

1 : *a* : En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^e$$

$$I_1 = \frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$$

b : C'est la même calcul que le précédent. On effectue une intégration par parties et on obtient le résultat.

$$I_{p+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{p+1} \, dx$$

$$I_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^{p+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (p+1) \frac{1}{x} (\ln x)^p \, dx$$

$$I_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^{p+1} \right]_1^e - \frac{p+1}{3} \int_1^e x^2 (\ln x)^p \, dx$$

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$$

c : En particulier, on a :

$$I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} I_1 = \frac{5}{27} e^3 - \frac{2}{27}$$

$$I_3 = \frac{e^3}{3} - I_2 = \frac{4}{27} e^3 + \frac{2}{27}$$

2 : *a* : Pour voir que la suite (I_n) est décroissante, il suffit de remarquer que pour tout x compris entre 1 et e, $\ln x$ est compris entre 0 et 1. Donc, pour tout x compris entre 1 et e, on a : $x^2 (\ln x)^{p+1} \leq x^2 (\ln x)^p$.

Comme l'intégrale sur [1 ; e] est une forme linéaire positive, on a bien $I_{p+1} \leq I_p$ si p est un entier positif.

b : Le fait que I_p soit ≥ 0 est clair. C'est donc une suite décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite L ≥ 0.

3 : *a* : Si L est > 0 , alors en particulier, la suite (p + 1) I_p tend vers + ∞. Mais d'après la relation obtenue en 1 : *b* , on a : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$.

Ce qui n'est pas possible si on considère le passage à la limite (p tend vers + ∞). Donc on ne peut pas avoir L > 0.

b : Comme L est un réel > 0, on en déduit que L = 0.

La suite converge donc vers 0.

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur $\in$] 0, + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)^2}$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in$] 0, + ∞ [: $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2}$

2. Soit X > 0.

a. Calculer $J = \int_1^X \dfrac{1}{x(1+x)^2}\, dx$

b. Vérifier que la fonction F définie sur] 0 ; + ∞ [par : $F(X) = \int_1^X \dfrac{1}{x(1+x)^2}\, dx$ est la primitive nulle en 1 de f.

CORRECTION

1. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2} = \dfrac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2} =$

$\dfrac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x(1+x)^2}$

il faut donc que $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ c=1 \end{cases}$ donc $c = 1$, $a = -1$ et $b = 1$

$f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2. *a*. Une primitive de f est g : $g(x) = -\ln|x| + \ln|x+1| - \dfrac{1}{x+1}$

X > 0 donc $J = -\ln X + \ln(X+1) - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2} - \ln 2$

b. f est une fonction continue sur] 0, + ∞ [donc la fonction F définie sur] 0 ; + ∞ [par : $F(X) = \int_1^X \dfrac{1}{x(1+x)^2}\, dx$ est la primitive nulle en 1 de f.

Ce qui peut se prouver autrement : g est une primitive de f donc $F(X) = g(X) - g(1)$

$F - g$ est une constante donc F est une primitive de f

$F(1) = g(1) - g(1) = 0$ donc la fonction F définie sur] 0 ; + ∞ [par : $F(X) = \int_1^X \dfrac{1}{x(1+x)^2}\, dx$ est la primitive nulle en 1 de f.

EXERCICE 3

On considère l'application f de **R** dans **R** définie par : $f(x) = (x + 2)\, e^{-x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. unité = 2cm

1 : Etudiez f et tracez (C).

2 : Calculez l'aire en cm^2 du domaine limité par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation "$x = m$ ", ($m \geq 0$).

3 : Soit $G(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)$.Montrez que G est une primitive de $[f(x)]^2$ sur **R**.

4 : La valeur moyenne de $[f(x)]^2$ sur le segment $[0 ; m]$ a-t-elle une limite lorsque m tend vers + ∞ ?

CORRECTION

1 : La fonction f est définie et dérivable sur **R**. De plus, pour tout x réel, on a : $f'(x) = e^{-x} - (x + 2)\, e^{-x} = e^{-x}(-x - 1)$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -1[$ et f est croissante sur $]-\infty; -1[$; $f'(-1) = 0$

$f'(x) < 0$ sur $]-1 ; -\infty[$ et f est décroissante sur $[-1 ; -\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

La courbe de f est alors :

2 : L'aire cherchée correspond à

$A(m) = \left(4\int_0^m f(x)\, dx\right)$ cm^2 car l'unité d'aire sur les axes est 2 cm.

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient alors :

$$\int_0^m (x+2)\, e^{-x}\, dx = \left[-(x+2)\, e^{-x}\right]_0^m + \int_0^m e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-(x+2)\, e^{-x} - e^{-x}\right]_0^m$$

$$= \left[-(x+3)\, e^{-x}\right]_0^m$$

$= -(m + 3)\, e^{-m} + 3$

Il ne reste plus qu'à multiplier par 4 pour avoir l'aire en cm^2.

On peut remarquer que cette aire tend vers 12 si m tend vers + ∞.

3 : Pour vérifier que G est une primitive de f^2, il suffit de calculer la dérivée de G. Or :

$$G'(x) = 2\, e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{13}{4}\right) - e^{-2x}\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$G'(x) = e^{-2x}(x^2 - 4x + 4)$

$G'(x) = [e^{-x}(x - 2)]^2$

$G'(x) = [f(x)]^2$ donc G est une primitive de $[f(x)]^2$ sur **R**.

4 : La valeur moyenne de $[f(x)]^2$ sur l'intervalle $[0 ; m]$ est : $\frac{1}{m}\int_0^m [f(x)]^2\, dx$ et comme G est une primitive de f^2.

$$\int_0^m [f(x)]^2\, dx = G(m) - G(0) = -e^{-2m}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{5m}{2} + \frac{13}{4}\right) + \frac{13}{4}\, e^{-2m}$$

$$\frac{1}{m}\int_0^m [f(x)]^2\, dx = -e^{-2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{5}{2} + \frac{13}{4m}\right) + \frac{13}{4m}$$

$\lim\limits_{m \to +\infty} m\, e^{-2m} = 0$ et $\lim\limits_{m \to +\infty} e^{-2m} = 0$ donc $\lim\limits_{m \to +\infty} e^{-2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{5}{2} + \frac{13}{4m}\right) = 0$ donc

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^m [f(x)]^2\, dx = 0$$

Session de remplacement, 1990

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Calculer: $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x)\,dx$ Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2.

CORRECTION

1. $u(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 2x$ donc $x = \dfrac{1}{2}u'(x)$ donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f est F : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|u(x)|$

$u(x) > 0$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$I_1 = F(1) - F(0)$ donc $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2$

2. $I_1 + I_2 = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$

$I_1 + I_2 = \int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx$

or $f(x) + g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x(1+x^2)}{1+x^2} = x$

donc

$I_1 + I_2 = \int_0^1 x\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}$

donc $\dfrac{1}{2}\ln 2 + I_2 = \dfrac{1}{2}$

$I_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$

Algérie, 1985

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2-2x-3}$.

1. Déterminer les nombres réels α et β tels que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f,

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}.$$

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]\,3\,;+\infty[$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

CORRECTION

1. $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3} + \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-3}$.

$f(x) - \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-3}$.

$\dfrac{-5}{x^2-2x-3} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-3}$

$\dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-3} = \dfrac{(\alpha+\beta)\,x+\beta-3\alpha}{(x+1)(x-3)}$

$\dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-3} = \dfrac{(\alpha+\beta)\,x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3}$

donc $\dfrac{(\alpha+\beta)\,x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3} = \dfrac{-5}{x^2-2x-3}$

donc $\alpha + \beta = 0$ et $\beta - 3\alpha = -5$

donc $\alpha = \dfrac{5}{4}$ et $\beta = -\dfrac{5}{4}$

donc $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3} + \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{x-3}$

2. $F(x) = \ln|x^2-2x-3| + \dfrac{5}{4}\ln|x+1| - \dfrac{5}{4}\ln|x-3| + k$ où k est un réel quelconque.

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$
$x > 3$ donc $x^2 - 2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$
donc

$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \dfrac{5}{4}\ln(x+1) - \dfrac{5}{4}\ln(x-3) + k$

$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \dfrac{5}{4}[\ln(x+1) - \ln(x-1)] + k$

$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \dfrac{5}{4}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + k$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x-3 = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x-3) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

National, 1995

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0, 1] par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$.

b. En déduire la dérivée f' de f .

c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et K

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2 I = K.

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

(Résultat admis)

c. En déduire les valeurs de J et de K.

CORRECTION

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0, 1] par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a. La dérivée de $x \to \sqrt{x^2+2}$ est la fonction $x \to \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

b. soit $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$,

$u'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{u(x)}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

donc f est une primitive de $x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

c. $I = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

2. *a*. $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

or $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2}$ donc

$J + 2I = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$

c. J + 2 I = K or $K = \sqrt{3} - J$.

donc $J + 2I = \sqrt{3} - J$ soit $2J = \sqrt{3} - 2I$

$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I$ or $I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

donc :

$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}$

Nancy-Metz, 1980

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui *a* même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

b. Soit k la fonction numérique définie par $k(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + x - 1$.

Factoriser k et en déduire la position relative de C_f et C_P, courbes représentatives respectives de f et P, dans un même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan.

c. À l'aide d'un encadrement de $1 + x$ pour $x \in [0, 1]$ montrer que : $\dfrac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,dx < \dfrac{1}{120}$.(Admettre ce résultat)

d. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 P(x)\,dx$.

CORRECTION

a. $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

$P(0) = f(0) = 1$ donc $d = 1$

$P(1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $a + b + c = -\dfrac{1}{2}$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$P'(0) = f'(0) = -1$ donc $c = -1$

$P'(1) = f'(1) = -\dfrac{1}{4}$ donc $3a + 2b + c = -\dfrac{1}{4}$

soit le système : $\begin{cases} 3a + 2b + c = -\dfrac{1}{4} \\ a + b + c = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3a + 2b = \dfrac{3}{4} \\ a + b = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ soit $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{3}{4}$, $c = -1$, $d = 1$

$P(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1$

b. $k(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + x - 1$

$k(x) = \dfrac{1 + (x-1)(x+1)}{1+x} + \dfrac{1}{4}(x^3 - 3x^2)$

$k(x) = \dfrac{x^2}{1+x} + \dfrac{1}{4}x^2(x-3)$

$k(x) = \dfrac{x^2}{4(1+x)}(4 + x - 3) = \dfrac{x^2}{4}$

d. $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \ln 2$

$\int_0^1 P(x)\,dx = \left[-\dfrac{1}{16}x^4 + \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{-1+4-8+16}{16} = \dfrac{11}{16}$

e. $k(x) = f(x) - P(x)$ or $\dfrac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,dx < \dfrac{1}{120}$ donc $\dfrac{1}{240} < \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 P(x)\,dx < \dfrac{1}{120}$

soit $\dfrac{1}{240} < \ln 2 - \dfrac{11}{16} < \dfrac{1}{120}$

$\dfrac{1}{240} + \dfrac{11}{16} < \ln 2 < \dfrac{11}{16} + \dfrac{1}{120}$

$\frac{166}{240} < \ln 2 < \frac{167}{240}$ donc $n = 166$

France Métropolitaine Juin 99

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \left(\frac{2t+3}{t+2} \right) \mathrm{d}t$

1 : *a* : Soit F la fonction définie sur [0 ; 2] par : $F(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Etudier les variations de F sur [0 ; 2]. En déduire que, pour tout réel t dans [0 ; 2], $\frac{3}{2} \leq F(t) \leq \frac{7}{4}$.

***b* :** Montrer que, pour tout réel t dans [0 ; 2], on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq F(t)\ e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{t}{n}} \frac{7}{4}$.

***c* :** Par intégration, en déduire que : $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$.

***d* :** On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors L est compris entre 3 et 3,5.

2 : *a* : Vérifier que, pour tout t Dans [0 ; 2], on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. En déduire l'intégrale I = $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} \mathrm{d}t$.

***b* :** Montrer que, pour tout t dans [0; 2], on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}}$.

***c* :** Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

CORRECTION

a : $F'(t) = \frac{1}{(t+2)^2}$ donc la fonction F est donc strictement croissante sur [0 ; 2].

Donc, pour tout t dans [0 ; 2] : $F(0) \leq F(t) \leq F(2)$, or $F(0) = \frac{3}{2}$ et $F(2) = \frac{7}{4}$, on a donc la réponse à la question.

b : Comme pour tout x réel, on a $e^x > 0$, on obtient les inégalités demandées en multipliant tous les termes des inégalités précédentes par $e^{\frac{t}{n}}$: $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq F(t)\ e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}\ e^{\frac{t}{n}}$.

c : Des inégalités précédentes, on peut alors déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{2} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t \leq \int_0^2 F(t)\, e^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t \leq \frac{7}{4} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t$

Une primitive de $e^{\frac{t}{n}}$ est $(n \cdot e^{\frac{t}{n}})$, d'où : $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t = n \left[e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{0}{n}} \right] = n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$.

On remarque que $u_n = \int_0^2 F(t)\, e^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t$. D'où : $\frac{3}{2} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right] \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$

c : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Soit $h = \frac{2}{n}$, comme $\frac{2}{n}$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\lim_{n \to +\infty} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right] = 2$$

D'où, la suite $\frac{3}{2} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$ tend vers 3 si n tend vers $+\infty$. De même, la suite $\frac{7}{4} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$ tend vers $\frac{7}{2}$ si n tend vers $+\infty$.

Comme la suite (u_n) est encadrée par ces deux suites, si elle possède une limite L, alors on doit avoir : $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2 : a : $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{t+2}\right) dt = \left[2t - \ln(t+2)\right]_0^2 = 4 - \ln 2$.

b : On utilise la fait que (e^x) est croissante sur IR. Donc, pour tout t dans [0 ; 2], on a $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{2}{n}$. D'où $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

Comme F(t) est ≥ 0 sur [0 ; 2], en multipliant les termes des inégalités précédentes par F(t), et en intégrant terme à terme, on obtient : $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$

c : Comme $e^{\frac{2}{n}}$ tend vers 1 si n tend vers $+\infty$, car $\frac{2}{n}$ tend vers 0, on en déduit de l'encadrement de la suite (u) précédent, que cette suite converge vers $L = 4 - \ln 2$.

Asie Juin-98

Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, d\,x .$$

1 : *a* : Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $]1 ; e[$, et pour tout n entier naturel, on a : $\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} > 0$

***b* :** En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2 : *a* : Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

***b* :** Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

***c* :** En déduire I_2, I_3 et I_4.

Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3 : *a* : Démontrer que pour tout n, $I_n \geq 0$

***b* :** Démontrer que pour tout n, $(n+1)I_n \leq I_n\, e$.

***c* :** En déduire la limite de I_n.

***d* :** Déterminer la valeur de $n\, I_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de $n\, I_n$.

CORRECTION

1 : *a* : Pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n \times [\, 1 - \ln x]$.

Pour x appartenant à l'intervalle $]1 ; e[$, on sait que $\ln x$ est appartient à $]\, 0 ; 1[$.

Donc $(\ln x)^n.[\, 1 - \ln x\,]$ est strictement négatif. D'où :

Pour tout x dans $]1 ; e[$ et pour tout n entier naturel , $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$

b : De là, on en déduit que pour tout n entier naturel,

$I_n - I_{n+1} \geq 0$,

et donc que la suite (I_n) est bien décroissante.

2 : *a* :

$$I_1 = \int_1^e \ln x \, d\,x = \int_1^e 1 . \ln x \, d\,x$$

$$= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, d\,x$$

$$= e - \int_1^e 1 \, d\,x = e - (e-1) = 1.$$

b : Comme la dérivée de $(\ln x)^{n+1}$ est $(n+1)\dfrac{1}{x}.(\ln x)^n$, on a :

$$I_{n+1} = \int_1^e [\ln x]^{n+1} \, d\,x$$

$$I_{n+1} = \left[\, x (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x\,(n+1)\,\frac{1}{x}\,(\ln x)^n \, d\,x$$

$$I_{n+1} = e - \int_1^e (n+1)\,(\ln x)^n \, d\,x$$

$I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$.

c : On peut alors écrire que :

$I_2 = e - 2 \,.\, I_1 = e - 2 = 0{,}718$ à 10^{-3} près par défaut

$I_3 = e - 3 \,.\, I_2 = 6 - 2e = 0{,}563$ à 10^{-3} près par défaut

$I_4 = e - 4 \,.\, I_3 = 9\,e - 24 = 0{,}464$ à 10^{-3} près par défaut

3 : *a* : Comme la fonction ln est positive sur $[1 ; e]$, on a bien $0 \leq I_n$.

b : A la question 2 :*b* :, on a montré que

$I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$.

Comme la suite (I_n) est positive, d'après la question précédente, on en déduit que pour tout n entier naturel non nul, on a :

$0 \leq e - (n+1)\, I_n$ ou encore $(n+1)\, I_n \leq e$

c : De là, on en déduit que $I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$. Comme la suite $\left(\dfrac{e}{n+1}\right)$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, et que la suite (I_n) est minorée par 0, on en conclut que la suite (I_n) tend vers 0.

d : Toujours d'après la question 2 : *b* :, on peut écrire que $(n+1)\, I_n + I_{n+1} = e$, ou encore :

$n\, I_n + (\, I_n + I_{n+1}) = e$

Comme la suite (I_n) converge vers 0, il en est de même pour $(\, I_n + I_{n+1})$, d'où la limite de $n\, I_n$ est e.

Sujet National 1995

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ et

pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

1 : *a*) Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par :
$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.
b) Calculer u_1.
2 : *a*) Prouver que la suite (u_n) est décroissante.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [0 ; 1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
Déterminer la limite de (u_n).
3 : Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on pose :
$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx$.

a) Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :
$n \,.\, u_n + (n-1)\, u_{n-2} = \sqrt{2}$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $(2n-1)\, u_n \leq \sqrt{2}$

c) Montrer que la suite $(n\, u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION

1 : *a* : Soit $u(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ alors $u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ donc $f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Une primitive de $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est la fonction f et donc que : $u_0 = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{2})$

b : La fonction à intégrer admet pour primitive : $\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. On obtient alors : $u_1 =$

$\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$:

a : Il suffit de remarquer que pour tout x appartenant à [0 ; 1] et pour tout n entier positif, on a : $x^{n+1} \leq x^n$.

Donc sur l'intervalle [0 ; 1] , on a : $\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq$

$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ soit $u_{n+1} \leq u_n$.

Cette suite est donc décroissante et minorée par 0. Elle admet donc une limite L positive.

b : pour tout x dans [0 ; 1] , $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ donc $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ soit $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$

or pour tout x dans [0 ; 1] $x^n \geq 0$ donc $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n\, dx \leq$

$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$

$\int_0^1 x^n \, dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \leq \dfrac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = 0$.

3 : *a* : $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \, dx + \int_0^1 \dfrac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int_0^1 \dfrac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \, dx =$

$\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2} \, dx = I_n$.

Avec une intégration par parties sur I_n, on obtient : $I_n = \left[\dfrac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 -$

$\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{n-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ donc $I_n = \dfrac{1}{n-1}(\sqrt{2} - u_n)$

En utilisant que $I_n = u_n + u_{n-2}$ alors $u_n + u_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}(\sqrt{2} - u_n)$ ce qui conduit bien à $n\, u_n + (n - 1)\, u_{n-2} = \sqrt{2}$

b : la suite (u) est décroissante et donc $u_n \leq u_{n+1}$ or $n\, u_n + (n-1)\, u_{n-2} = \sqrt{2}$ donc $(2n-1)\, u_n \leq \sqrt{2}$.

c : D'après les résultats obtenus précédemment : pour tout n, on a : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $(2n-1)\, u_n \leq \sqrt{2}$.

$\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq n\, u_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} + u_n$. or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, u_n =$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (théorème des gendarmes)