Partie A
Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

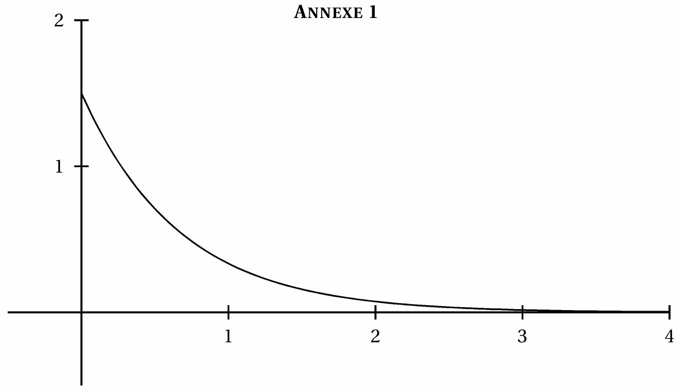
On rappelle que $P(X \le a) = \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}\, x$

La courbe donnée en annexe 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \le 1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

ANNEXE 1



Partie B
On pose λ = 1,5.

1. Calculer $P(X \le 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2. Calculer $P(X > 2)$.

3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \le X \le 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

4. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}\, x$

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C
Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ = 1,5.
Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

CORRECTION

Partie A

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \le 1)$.

la fonction densité associée est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$
par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

$P(X \le 1) = \int_0^1 \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}\, x$

$P(X \le 1)$ est l'aire du domaine plan limité par les droites $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

$f(0) = \lambda$

Partie B
On pose λ = 1,5.

1. Calculer $P(X \le 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

$P(X \le 1) = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}777$

2. Calculer $P(X > 2)$.

$P(X > 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}050$

3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \le X \le 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

$P(1 \le X \le 2) = P(X \le 2) - P(X \le 1) = 1 - 0{,}050 - 0{,}777 = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

4. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}\, x$

En prenant :

$u'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ $u(x) = -\, e^{-\lambda x}$
$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$$\int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\,x\, e^{-\lambda x}\right]_0^t - \int_0^t -\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = -\,t\, e^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = -\,t\, e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\lambda} - t\, e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.
Soit $X = \lambda\, t$, $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} X = +\infty$

$t\, e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda} X\, e^{-X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} X\, e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t\, e^{-\lambda t} = 0$

$\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda} e^{-X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\lambda} = 2\,000$

Partie C

1. ***a.*** Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

$p(X \le t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\, e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

Soit les événements
A : « l'écart entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine est inférieur à 1 »
B : « l'écart entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine est compris entre 1 et 2 »
C : « le cylindre est accepté »
$p_A(C) = 1$; $p_B(C) = 0,8$
$p(A) = p(X \le 1) = 1 - e^{-1,5}$
$p(B) = p(1 \le X \le 2) = e^{-1,5} - e^{-3}$

L'événement « un cylindre est accepté » se décompose en deux événements incompatibles : $A \cap C$ et $B \cap C$
donc $p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C)$
$p(C) = p_A(C) \times p(A) + p_A(C) \times p(B)$
$p(C) = 1 - e^{-1,5} + 0,8 \times (e^{-1,5} - e^{-3}) = 1 - 0,2\, e^{-1,5} - 0,8\, e^{-3}$
$p(C) \approx 0,915$

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

$$p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{0,8 \times (e^{-1,5} - e^{-3})}{1 - 0,2\, e^{-1,5} - 0,8\, e^{-3}} \approx 0,151$$

2. ***a.*** Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
succès : le cylindre est accepté ($p = 0,915$)
échec : le cylindre n'est pas accepté ($q = 1 - p = 0,085$)
donc la variable aléatoire Y qui représente le nombre de cylindres acceptés suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,915)
$p = p(Y = 10) = (0,915)^{10}$
b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?
L'événement « un cylindre au moins est refusé est l'événement contraire de « les 10 cylindres sont acceptés » donc
$p' = 1 - 0,915^{10}$