ENONCE

PARTIE A :

On considère le système de congruences : $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z" définies par : $z' = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z$ et $z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\, z$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.
2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences : $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$.
On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.
a. Quelle est la nature de chacun des triangles O $A_n A_{n+1}$?
b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b. Indiquer une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB_n}$, $\overrightarrow{OB_{n+2}}$).
c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.
4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

CORRECTION

PARTIE A :

1. $11 = 3 \times 3 + 2$ donc $11 \equiv 2$ (modulo 3) et $11 = 5 \times 2 + 1$ donc $11 \equiv 1$ (modulo 3) donc 11 est solution de (S).

2. Si n est solution de (S) alors $n \equiv 2$ modulo 3 or $11 \equiv 2$ (modulo 3)
donc par différence membre à membre $n - 11 \equiv 0$ (modulo 3) soit $n - 11$ est divisible par 3.

3. De même si n est solution de (S) alors $n \equiv 1$ modulo 5 or $11 \equiv 1$ (modulo 5)
donc par différence membre à membre $n - 11 \equiv 0$ (modulo 5) soit $n - 11$ est divisible par 5.
3 et 5 divisent $n - 11$ et 3 et 5 sont premiers entre eux donc 3×5 divise $n - 11$
si n est solution de (S) alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 15\,k$
Réciproquement s'il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 15\,k$; alors $n \equiv 11$ (modulo 3) et $n \equiv 11$ (modulo 5)
or 11 est solution de (S) donc $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$.
Les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

1. $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\, z$ et $z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\, z$.
Ces expressions sont de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} z$ donc ces transformations sont des rotations de centre O d'angle θ.
f est une rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et g est une rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

2. *a.* Pour tout n de $\mathbb{N}$, A_{n+1} est l'image de A_n par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ donc le triangle O $A_n A_{n+1}$ est équilatéral direct.
b. Les triangles OA_0A_1 ; O A_1A_2 ; O A_2A_3 ; O A_3A_4 ; O A_4A_5 ; O A_5A_0 sont équilatéraux donc
$OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = OA_5$ donc le polygone est inscrit dans le cercle de centre O de rayon OA_0
de plus $OA_0 = A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_0$
donc le polygone est régulier : il s'agit d'un hexagone régulier de centre O.

3. *a.* $b_0 = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$ donc $OB_0 = |b_0| = |4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}| = 4$ donc B_0 appartient au cercle Γ de centre O de rayon 4.
Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $B_n \in \Gamma$ alors $B_{n+1} \in \Gamma$
$B_n \in \Gamma \Leftrightarrow |b_n| = 4$ or $b_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} b_n$ donc $|b_{n+1}| = |b_n| = 4$ donc $B_{n+1} \in \Gamma$
La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, les points B_n sont situés sur le cercleΓ de centre O de rayon 4.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n \neq 0$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \arg \dfrac{b_{n+2}}{b_n}$ or $b_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{5}} b_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{5}} e^{i\frac{\pi}{5}} b_n$

donc $\dfrac{b_{n+2}}{b_n} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \dfrac{2\pi}{5} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c. $B_0B_2B_4B_6B_8$ est un pentagone inscrit dans le cercle de centre O de rayon 4.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \dfrac{2\pi}{5} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

donc $(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_2}) = (\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_4}) = (\overrightarrow{OB_4}, \overrightarrow{OB_6}) = (\overrightarrow{OB_6}, \overrightarrow{OB_8}) = (\overrightarrow{OB_8}, \overrightarrow{OB_0}) = \dfrac{2\pi}{5} + + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Le pentagone est donc régulier.

4. *a.* A_n (resp. B_n) est l'image de A_0 (resp. B_0) par n rotations de même centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (resp. $\theta = \dfrac{\pi}{5}$), donc par une rotation de même centre O d'angle $n\theta = \dfrac{n\pi}{3}$ (resp. $\dfrac{n\pi}{5}$) donc $a_n = e^{i\frac{n\pi}{3}} a_0 = 2e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}}$ et $b_n = e^{i\frac{n\pi}{5}} b_0 = 4e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}}$

b. A_n est sur l'axe des réels si et seulement si $\arg a_n = k\pi \Leftrightarrow \dfrac{(n-2)\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow n-2 = 3k \Leftrightarrow n \equiv 2$ (modulo 3)

B_n est sur l'axe des réels si et seulement si $\arg b_n = k'\pi \Leftrightarrow \dfrac{(n-1)\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow n-1 = 5k \Leftrightarrow n \equiv 1$ (modulo 5)
Les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.