Antilles-Guyane septembre 2008

PARTIE A :

On considère le système de congruences : (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par : $z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$ et $z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}} z$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives : $a_0 = 2\ \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et et $b_0 = 4\ \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences : $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$.

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $OA_n\,A_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. *a*. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. *a*. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

CORRECTION

PARTIE A :

On considère le système de congruences : (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. $11 = 3 \times 3 + 2$ donc $11 \equiv 2$ (modulo 3) et $11 = 2 \times 5 + 1$ donc $11 \equiv 1$ (modulo 5) donc 11 est solution de (S).

2. $n \equiv 2$ modulo (3) et $11 \equiv 2$ (modulo 3) donc $n \equiv 11$ modulo (3) donc $n - 11$ est divisible par 3.

3. $n \equiv 1$ modulo (5) et $11 \equiv 1$ (modulo 5) donc $n \equiv 11$ modulo (5) donc $n - 11$ est divisible par 5.

$n - 11$ est divisible par 3 donc il existe un entier relatif q tel que $n - 11 = 3\,q$

$n - 11$ est divisible par 5 donc il existe un entier relatif q' tel que $n - 11 = 5\,q'$

soit $3\,q = 5\,q'$ donc 5 divise $3\,q$ or 3 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise q

Il existe donc un entier relatif k tel que $q = 5\,k$ alors $n - 11 = 3 \times 5\,k$ soit $n = 11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

Réciproquement si $n = 11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif. alors $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$ donc n est solution de (S)

PARTIE B :

1. f est définie par $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z$ donc f est la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$

g est définie par $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}} z$ donc g est la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{5}$

2. *a*. A_{n+1} est l'image de A_n par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc le triangle $OA_n\,A_{n+1}$ est équilatéral.

b. $A_0 = A_6$ or chaque triangle $OA_n\,A_{n+1}$ est équilatéral donc $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_0$

Le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone régulier.

3. *a*. g est la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{5}$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $OB_n = OB_0 = |\,b_0\,| = 4$ donc les points B_n sont situés sur le cercle de centre O et le rayon 4.

b. $B_{n+1} = g(B_n)$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}) = -\frac{\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = -\frac{\pi}{5}$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = -\frac{2\pi}{5} + 2\,k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c. g est la rotation de centre O d'angle $-\dfrac{\pi}{5}$ transformant B_0 en B_1, B_1 en B_2 etc. donc $OB_0 = OB_2 = OB_4 = OB_6 = OB_8$

Le polygone $B_0 B_2 B_4 B_6 B_8$ est de centre O.

$(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = -\dfrac{2\pi}{5} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_2}) = -\dfrac{2\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_4}) = -\dfrac{2\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{OB_4}, \overrightarrow{OB_6}) = -\dfrac{2\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{OB_6}, \overrightarrow{OB_8}) = -\dfrac{2\pi}{5}$

$(\overrightarrow{OB_8}, \overrightarrow{OB_0}) = 2\pi - [(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_2}) + (\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_4}) + (\overrightarrow{OB_4}, \overrightarrow{OB_6}) + (\overrightarrow{OB_6}, \overrightarrow{OB_8})]$

$(\overrightarrow{OB_8}, \overrightarrow{OB_0}) = -\dfrac{2\pi}{5}$ donc le pentagone $B_0 B_2 B_4 B_6 B_8$ est régulier de centre O.

4. *a*. Montrons par récurrence que $a_n = 2\,e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}}$

$a_0 = 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire pour tout n de $\mathbb{N}$ c'est-à-dire que si $a_n = 2\,e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}}$ alors $a_{n+1} = 2\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$.

$a_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} a_n$ or $a_n = 2\,e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}}$ donc $a_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\,e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}} = 2\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que $b_n = 4\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}}$

$b_0 = 4\,e^{-i\frac{\pi}{5}}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire pour tout n de $\mathbb{N}$ c'est-à-dire que si $b_n = 4\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}}$ alors $b_{n+1} = 4\,e^{i\frac{n\pi}{5}}$.

$b_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{5}} b_n$ or $b_n = 4\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}}$ donc $b_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{5}} \times 4\,e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}} = 4\,e^{i\frac{n\pi}{5}}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. A_n appartient à l'axe des réels si et seulement si $\dfrac{n-2}{3}\pi = k\pi$ ($k \in$ Z) soit $n - 2 = 3k$ soit $n \equiv 2$ (modulo 3)

B_n appartient à l'axe des réels si et seulement si $\dfrac{n-1}{5}\pi = k'\pi$ ($k' \in$ Z) soit $n - 1 = 5k'$ soit $n \equiv 1$ (modulo 5)

les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.