La Réunion juin 2011

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

On désigne par P le plan d'équation $2\,x + 3\,y - z + 4 = 0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1\,;2\,;-4)$ et $(-3\,;4\,;1)$.

1. Soit D la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -8 + 2\,t \\ y = 7 - t \\ z = 6 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

- Le plan P et la droite D sont sécants.
- Le plan P et la droite D n'ont aucun point en commun.
- La droite D est incluse dans le plan P.
- Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note P' le plan d'équation $x + 4\,y - 3\,z + 4 = 0$.

- Les plans P et P' sont parallèles et distincts.
- Les plans P et P' sont confondus.
- Les plans P et P' sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$.
- Les plans P et P' sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

- une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1\,;3\,;-\dfrac{1}{2}\right)$,
- une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$
- le plan d'équation $-4\,x + 2\,y + 5\,z - \dfrac{5}{2} = 0$
- le plan d'équation $-4\,x + 2\,y + 5\,z + \dfrac{5}{2} = 0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} \right\| = 5$ est :

- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\,;5\,;\dfrac{7}{2}\right)$,
- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\,;-5\,;-\dfrac{7}{2}\right)$,
- le plan d'équation $-4\,x + 2y + 5\,z - 5 = 0$,
- le plan d'équation $-4\,x + 2\,y + 5\,z + \dfrac{5}{3} = 0$.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.

Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.

Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.

En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.

On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».

Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.

Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.

On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question sur le sport.

On considère les évènements suivants :

H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »

L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »

S : « la question posée au candidat porte sur le sport »

C : « le candidat répond correctement à la question posée »

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.

b. Calculer la probabilité de l'évènement C.

c. Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à 0,7.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

a. Soit k un entier compris entre 0 et 10.

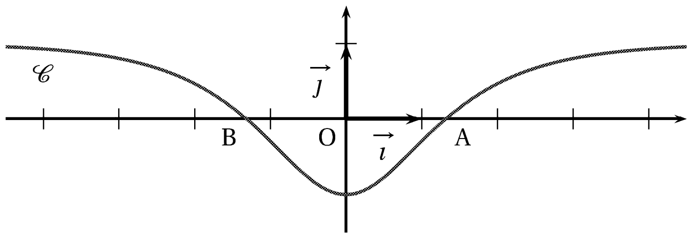
Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.

b. Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^{2}}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. Démontrer que cette conjecture est vraie.

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^{a}$.

a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de a.

b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leq F(a) \leq 0$.

3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geq 1 - 4\,\mathrm{e}^{-t}$.

b. En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geq x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient *A*, *B* deux points du plan d'affixes respectives *a* et *b*.

On rappelle que :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
- L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport k ($k > 0$) et d'angle θ est le point *C* défini par :

$$AC = k\,AB \text{ et si } A \neq B,\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe *c* du point *C* en fonction de *a*, *b*, θ et *k*.

Partie B

1. Résoudre dans C l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives $z_{\text{P}} = \frac{3}{2}(1 + \text{i})$, $z_{\text{Q}} = \frac{3}{2}(1 - \text{i})$ et $z_{\text{R}} = -2\text{i}\sqrt{3}$.

2. Placer les points P, Q, R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.

3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q. Vérifier que l'affixe z_{S} du point S est $3 + \text{i}(2\sqrt{3} - 3)$.

4. Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer les affixes z_{A} et z_{C} des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation *r*.

5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\vec{v}$.

Calculer les affixes z_{B} et z_{D} des points B et D.

6. *a.* Démontrer que $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{P}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{P}}} = \text{i}$.

b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient *A*,*B* deux points du plan d'affixes respectives *a* et *b*.

On rappelle que :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
- L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport k ($k > 0$) et d'angle θ est le point *C* défini par :

$$AC = k\,AB \text{ et si } A \neq B,\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe *c* du point *C* en fonction de *a*, *b*, θ et *k*.

Partie B

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

1. *a.* Montrer que le couple $(-1 ; -2)$ est une solution de (E).

b. Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

2. Soient *d* et *d'* les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.

a. Vérifier que pour tout entier relatif *k*, le point A_k de coordonnées $(k - 3 ; 2k - 2)$ appartient à la droite *d*.

On admettra que ce sont les seuls points de *d* à coordonnées entières.

b. Montrer que les seuls points de *d'* à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k' - 1 ; 3k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. *a.* Existe-t-il deux entiers relatifs *k* et *k'* tels que $A_k = B_{k'}$?

b. Déterminer les entiers relatifs *k* et *k'* tels que le segment $[A_k B_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

c. Trouver l'entier *q* tel que $\overrightarrow{A_{3q} B_{2q}} = 4\vec{u}$.

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note *H* le milieu du segment $[A_6 B_4]$.

On désigne par *f* la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude *f*.

b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point *H* soit l'origine *O* du repère.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. Le plan P a pour équation $2x + 3y - z + 4 = 0$ et la droite D a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = 6 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Le point d'intersection éventuel doit vérifier ces deux conditions donc $2(-8 + 2t) + 3(7 - t) - (6 + t) + 4 = 0$ soit $3 = 0$ ce qui est impossible donc le plan P et la droite D n'ont aucun point en commun.

2. Les points d'intersection de P et P' doivent vérifier $\begin{cases} x + 4y - 3z + 4 = 0 \\ 2x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

En posant $y = t$ et en résolvant le système $\begin{cases} x - 3z = -4t - 4 \\ 2x - z = -3t - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & x - 3z = -4t - 4 \\ L_2 - 2L_1 & 5z = 5t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5L_1 + 3L_2 & 5x = -5t - 8 \\ L_2 & 5z = 5t + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 4y - 3z + 4 = 0 \\ 2x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t - \dfrac{8}{5} \\ y = t \\ z = t + \dfrac{5}{5} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ donc les plans P et P' sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est l'ensemble des points M du plan tels que MA = MB $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 - 4y + 4 - 8z + 16 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 9 - 8y + 16 - 2z + 1$
$\Leftrightarrow -2x - 4y - 8z + 21 = 6x - 8y - 2z + 26$
$\Leftrightarrow -8x + 4y - 6z - 5 = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 5z - \dfrac{5}{2} = 0$ donc le plan médiateur de [AB] a pour équation $-4x + 2y + 5z - \dfrac{5}{2} = 0$

On pouvait aussi chercher les coordonnées du milieu I de [AB] et dire que le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

4. $-3 + 1 \neq 0$, soit G le barycentre de (A ; 1) (B ; – 3), G a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} ; \dfrac{y_A - 3y_B}{1-3} ; \dfrac{y_A - 3y_B}{1-3}\right)$ soit $\left(-5 ; 5 ; \dfrac{7}{2}\right)$. Pour tout point M de l'espace $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$ donc $\left\| \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \right\| = 5 \Leftrightarrow 2MG = 5$ donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \right\| = 5$ est la sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5 ; 5 ; \dfrac{7}{2}\right)$ de rayon $\dfrac{5}{2}$.

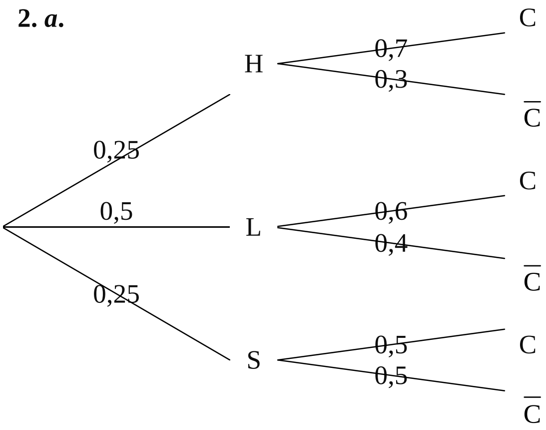
EXERCICE 2   5 points   Commun à tous les candidats

1. l’assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l’urne donc le nombre de cas possibles est $\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix} = 210$

A est l’évènement « les quatre questions portent sur l’histoire » or il n’existe que 4 questions d’histoire donc le nombre de cas favorables est 1. $p(\text{A}) = \dfrac{1}{210}$

B est l’évènement « l’une au moins des quatre questions porte sur le sport », B a pour événement contraire « aucune des quatre questions porte sur le sport », c’est-à-dire que les 4 bulletins ont été choisis parmi les 8 portant sur la littérature ou l’histoire donc le nombre de cas favorables est $\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = 70$. $p(\overline{\text{B}}) = \dfrac{70}{210} = \dfrac{1}{3}$ donc $p(\text{B}) = 1 - p(\overline{\text{B}}) = \dfrac{2}{3}$.

2. *a.*



2. *b.* $p(\text{H} \cap \text{C}) = 0,25 \times 0,7 = 0,175$
$p(\text{L} \cap \text{C}) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$
$p(\text{S} \cap \text{C}) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$
donc $p(\text{C}) = p(\text{H} \cap \text{C}) + p(\text{L} \cap \text{C}) + p(\text{S} \cap \text{C}) = 0,6$.

2. *c.* $p_{\text{C}}(\text{S}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{C})}{p(\text{C})} = \dfrac{0,125}{0,6} = 0,208$

3. *a.* On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d’elles a deux issues :

- le candidat répond correctement à la question ($p = 0,7$)
- le candidat ne répond pas correctement à la question ($q = 0,3$)

donc X suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,7).
$p(X = k) = \begin{pmatrix}k\\10\end{pmatrix} \times 0,7^{k} \times 0,3^{10-k}$.

b. $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = \begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix} \times 0,7^{9} \times 0,3 + \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix} \times 0,7^{10} \times 0,3^{0} = 0,1493 \approx 0,15$

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. *a.* Pour tout réel x, $f\,'(x) = \dfrac{4\,e^{x}\,(e^{2x}+1) - 4\,e^{x} \times 2\,e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{2}} = \dfrac{4\,e^{x}\,[e^{2x}+1-2\,e^{2x}]}{(e^{2x}+1)^{2}} = \dfrac{4\,e^{x}\,(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^{2}}$.

b. La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, donc $f\,'(x)$ a le même signe que $e^{2x} - 1$.

$e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\,x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. $f(-x) = 1 - \dfrac{4\,e^{-x}}{e^{-2x}+1} = 1 - \dfrac{4\,e^{-x} \times e^{2x}}{(e^{-2x}+1) \times e^{2x}} = 1 - \dfrac{4\,e^{x}}{e^{2x}+1} = f(x)$ donc la fonction f est paire, la droite d'équation $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe C.

3. *a.* a est l'abscisse du point A donc $f(a) = 0$ donc $1 - \dfrac{4\,e^{a}}{e^{2a}+1} = 0 \Leftrightarrow e^{2a} + 1 - 4\,e^{a} = 0 \Leftrightarrow c^{2} - 4\,c + 1 = 0$ donc le réel c est une solution de l'équation $x^{2} - 4\,x + 1 = 0$.

$x^{2} - 4\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^{2} = 3 \Leftrightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3}$ ou $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. On a $0 < x_2 < 1 < x_1$ or $1 < a < 2$ donc $1 < e^{a} < e^{2}$ donc $e^{a} = x_1$

$e^{a} = 2 + \sqrt{3}$ donc $a = \ln(2 + \sqrt{3})$

b. Sur $[0\,;+\infty\,[$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a$ et f est paire d'où le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\ln(2+\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

Partie B

1. la fonction f est définie continue sur $\mathbb{R}$ donc F est la primitive nulle en 0 de f, donc $F'(x) = f(x)$

x	$-\infty$		$-\ln(2+\sqrt{3})$		0		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f(x)$		+	0		–		0	+	
F		↗		↘	0	↘		↗	

2. La fonction f est positive négative sur $[0\,;a]$ donc $\displaystyle\int_0^a -f(t)\,dt$ est l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$

$F(a) = -\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ est l'opposé de l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$, $f(0) = -1$ donc sur $[0\,;a]$ la courbe est dessinée à l'intérieur d'un rectangle de longueur a et de largeur 1 donc

$0 \leq \displaystyle\int_0^a -f(t)\,dt \leq a$ donc $-a \leq F(a) \leq 0$.

3. *a.* $f(t) - (1 - 4\,e^{-t}) = 1 - \dfrac{4\,e^{t}}{e^{2t}+1} - (1 - 4\,e^{-t}) = 4\,e^{-t} - \dfrac{4\,e^{t}}{e^{2t}+1}$

$f(t) - (1 - 4\,e^{-t}) = 4\,\dfrac{e^{-t}(e^{2t}+1) - e^{t}}{e^{2t}+1} = 4\,\dfrac{e^{t} + e^{-t} - e^{t}}{e^{2t}+1} = 4\,\dfrac{e^{-t}}{e^{2t}+1}$, la fonction exponentielle est positive sur R donc pour tout réel positif t, $f(t) - (1 - 4\,e^{-t}) > 0$ donc pour tout réel positif t, $f(t) > 1 - 4\,e^{-t}$.

b. pour tout réel positif t, $f(t) > 1 - 4\,e^{-t}$, les fonctions f et $t \to 1 - 4\,e^{-t}$ sont continues donc pour tout x positif,

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x (1 - 4\,e^{-t})\,dt$ donc $F(x) \geq \left[\,t + 4\,e^{-t}\,\right]_0^x$ soit $F(x) \geq x + 4\,e^{-x} - 4$

Pour tout x réel $e^{-x} > 0$ donc $x + 4\,e^{-x} - 4 > x - 4$ donc pour tout réel positif x, $F(x) \geq x - 4$

Pour tout réel positif x, $F(x) \geq x - 4$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x - 4 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

4. f est paire et F est la primitive nulle en 0 de f, donc F est impaire donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

Ce qui pouvait se démontrer à l'aide des aires (le graphique est fait en choisissant $x = -5$) :
f est paire, donc l'aire (aire marron) comprise entre les droites $t = -a$, $t = 0$, l'axe des abscisses et la courbe de f est égale à l'aire (aire rose) comprise entre les droites $t = 0$, $t = a$, l'axe des abscisses et la courbe de f, f étant négative sur $[0 ; a]$ donc

$$\int_{-a}^{0} -f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t$$

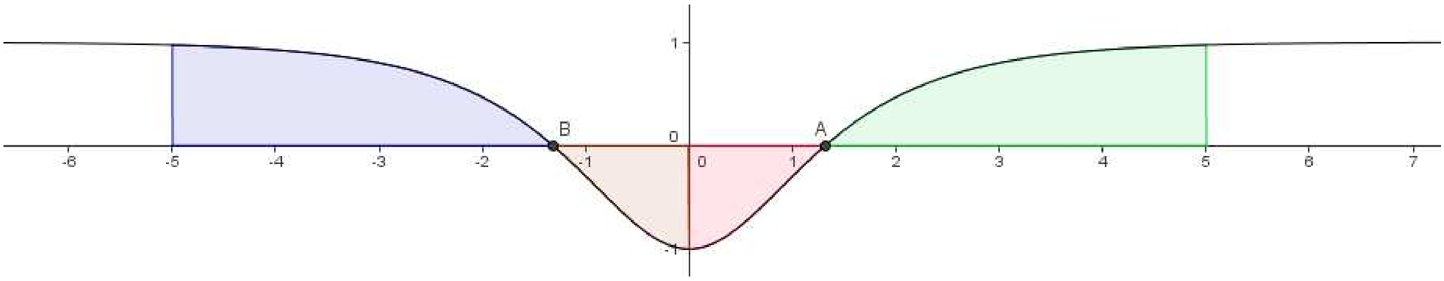
soit : $\displaystyle\int_{0}^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit x un réel négatif, $x < -a$, f est paire, donc l'aire (aire bleue) comprise entre les droites $t = -a$, $t = x$, l'axe des abscisses et la courbe de f est égale à l'aire (aire verte) comprise entre les droites $t = a$, $t = x$, l'axe des abscisses et la courbe de f, f étant positive sur $[a ; +\infty[$, $\displaystyle\int_{x}^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$, en appliquant la relation de Chasles :

si $x < -a$: $\displaystyle F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$\displaystyle F(x) = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\left(\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -\int_{a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc si $x < -a$, $F(x) = -F(-x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.



EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Restitution organisée de connaissances

$AC = AB$ donc $|c - a| = |b - a|$ soit si $a \neq b$, $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$,

si $A \neq B$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2n\pi$.où $n \in \mathbb{Z}$ donc si $a \neq b$, $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \theta + 2n\pi$.où $n \in \mathbb{Z}$.

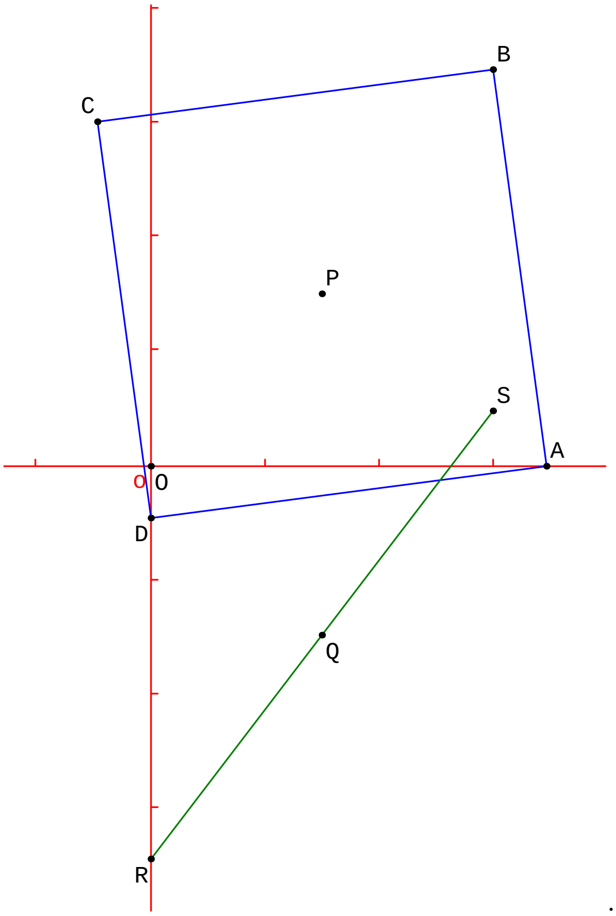
si $a \neq b$, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un complexe de module 1 et d'argument θ donc $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ soit : $c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b - a)$.

A est invariant par la rotation, si $b = a$ alors $c = a$ donc la propriété reste vraie.

Partie B

1. $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 9 = -36 = (6\,\mathrm{i})^2$ donc $z_1 = \dfrac{6+6\,\mathrm{i}}{4} = \dfrac{3}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})$

2.



3. Q est le milieu de [RS] donc $2z_Q = z_R + z_S$ donc $z_S = 2z_Q - z_R = 3 + \mathrm{i}(2\sqrt{3} - 3)$.

4. La rotation r a pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z$ donc $z' = \mathrm{i}\,z$. Les affixes z_A et z_C des points A et C, images respectives des points R et S sont donc $z_A = \mathrm{i}\,z_R = 2\sqrt{3}$ et $z_C = \mathrm{i}\,z_S = -(2\sqrt{3} - 3) + 3\,\mathrm{i}$ soit $z_C = 3 - 2\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}$

5. La translation de vecteur $3\vec{v}$ a pour écriture complexe $z' = z + 3\,\mathrm{i}$. les affixes z_B et z_D des points B et D, images respectives des points R et S sont donc $z_B = -2\,\mathrm{i}\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}$ et $z_D = 3 + \mathrm{i}(2\sqrt{3} - 3) + 3\,\mathrm{i}$ soit : $z_B = (-2\sqrt{3} + 3)\,\mathrm{i}$ et $z_D = 3 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

6. *a.* $$\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i} - \frac{3}{2}(1+\mathrm{i})}{(-2\sqrt{3}+3)\,\mathrm{i} - \frac{3}{2}(1+\mathrm{i})} = \frac{\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\mathrm{i}}{-\frac{3}{2} + \left(-2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)} = \mathrm{i}\,.$$

b. $\dfrac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \mathrm{i}$ donc $\dfrac{z_C - z_P}{z_B - z_P}$ est un complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle BCP est rectangle isocèle en P.

$2z_P = 3 + 3\,\mathrm{i} = z_A + z_C$ donc P est le milieu de [AC] de même $z_B + z_D = 2z_P$ P est le milieu de [BD] donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme de centre P, le triangle BCP est rectangle en P donc les diagonales sont perpendiculaires entre elles donc le quadrilatère ABCD est un losange.

Le triangle BCP est isocèle en P donc les diagonales ont même longueur donc le quadrilatère ABCD est un rectangle.

le quadrilatère ABCD est un rectangle et un losange donc est un carré.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Restitution organisée de connaissances

$AC = k\,AB$ donc $|\,c - a\,| = k\,|\,b - a\,|$ soit si $a \neq b$, $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = k$,

si $A \neq B$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2\,n\,\pi$.où $n \in \mathbb{Z}$ donc si $a \neq b$, $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \theta + 2\,n\,\pi$.où $n \in \mathbb{Z}$.

si $a \neq b$, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un complexe de module k et d'argument θ donc $\dfrac{c-a}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ soit : $c - a = k\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\,(b - a)$.

A est invariant par la similitude donc si $b = a$ alors $c = a$ donc la propriété reste vraie.

Partie B

1. *a.* $3 \times (-1) - 2 \times (-2) = -3 + 4 = 1$ donc le couple $(-1\,;\,-2)$ est une solution de (E).

b. $\begin{cases} 3\,x - 2\,y = 1 \\ 3 \times (-1) - 2 \times (-2) = 1 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $3\,(x + 1) - 2\,(y + 2) = 0$

soit $3\,(x + 1) = 2\,(y + 2)$, donc 3 divise $2\,(y + 2)$, 2 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y + 2$
Il existe un entier relatif k tel que $y + 2 = 3\,k$.
En remplaçant dans $3\,(x + 1) = 2\,(y + 2)$, on en déduit que $x + 1 = 2\,k$.
Donc si $3\,x - 2\,y = 1$ alors $x = 2\,k - 1$ et $y = 3\,k - 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vérification : si $x = 2\,k - 1$ et $y = 3\,k - 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $3\,x - 2\,y = 3\,(2\,k - 1) - 2\,(3\,k - 2) = 6\,k - 3 - 6\,k + 4 = 1$

donc les solutions de $3\,x - 2\,y = 1$ sont les couples $(x\,;\,y)$ de la forme $(2\,k - 1\,;\,3\,k - 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. *a.* d a pour équation $y = 2\,x + 4$ or si $x = k - 3$ alors $2\,x + 4 = 2\,(k - 3) + 4 = 2\,k - 6 + 4 = 2\,k - 2$ donc pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k - 3\,;\,2\,k - 2)$ appartient à la droite d.

b. D'après la question **1.** si $3\,x - 2\,y = 1$ avec x et y entiers relatifs, alors $x = 2\,k' - 1$ et $y = 3\,k' - 2$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ donc les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2\,k' - 1\,;\,3\,k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. *a.* $A_k = B_{k'} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 3 = 2\,k' - 1 \\ 2\,k - 2 = 3\,k' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2\,k' = 2 \\ 2\,k - 3\,k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,k - 4\,k' = 4 \\ 2\,k - 3\,k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k' = 4 \\ 2\,k - 3\,k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -4 \\ k = -6 \end{cases}$ donc il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$

b. $\overrightarrow{A_k\,B_{k'}}$ a pour coordonnées $(k - 2\,k' - 2\,;\,2\,k - 3\,k')$

Le segment $[A_k\,B_{k'}]$ est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $k - 2\,k' - 2 = 0$ soit $k = 2\,(k' + 1)$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

c. $A_{3\,q}$ a pour coordonnées $(3\,q - 3\,;\,6\,q - 2)$; $B_{2\,q}$ a pour coordonnées $(4\,q - 1\,;\,6\,q - 2)$ donc $\overrightarrow{A_{3q}\,B_{2q}}$ a pour coordonnées $(q + 2\,;\,0)$ donc $\overrightarrow{A_{3q}\,B_{2q}} = 4\,\vec{u} \Leftrightarrow q + 2 = 4 \Leftrightarrow q = 2$.

4. *a.* D'après la première partie, l'écriture complexe de la similitude f est $z' = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,(z - \omega) + \omega$ soit $z' = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,z + \omega\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)$

b. A_6 a pour coordonnées $(3\,;\,10)$; B_4 a pour coordonnées $(7\,;\,10)$ donc le milieu H du segment $[A_6\,B_4]$ a pour coordonnées $(5\,;\,10)$

L'image du point H est l'origine O du repère $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,h + \omega\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(5 + 10\,\mathrm{i}) + \omega\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -5\,\mathrm{i}\,(1 + 2\,\mathrm{i}) + \omega\,(2 - \mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{5\,\mathrm{i}\,(1 + 2\,\mathrm{i})}{2 - \mathrm{i}} = \dfrac{5\,(-2 + \mathrm{i})}{2 - \mathrm{i}} = -5$