D'après France Métropolitaine Septembre 1999 - Bac ES

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (penalty) de ses joueurs. Il a alors remarquer que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque

- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

I. ***a.*** Calculez la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entraînement.

b. Précisez les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité. (on pourra s'aider d'un arbre).

c. Calculez l'espérance de X .

II. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque X > 8.

Montrez que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61 .

III. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement.

On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours des ces 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.

Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.

Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 *chiffres après la virgule.*

Calculez pour un joueur :

a . la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.

b . la probabilité d'avoir exactement 6 succès .

c . la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

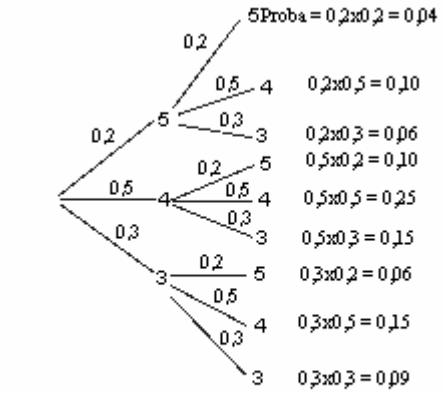
III .Calculez le nombre minimale d'entraînement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

CORRECTION

Avant de commencer cet exercice ; il vaut mieux faire un arbre qui résume la situation.

Un joueur tire donc deux séries de 5 ballons. Pour chaque série ; le joueur marque 3 ou 4 ou 5 buts avec des probabilités respectives de 0 ; 2 ou 0 ; 5 ou 0 ; 3.

Ceci conduit alors à l'arbre suivant. Les probabilité calculées tiennent compte du fait que les résultats des tirs sont indépendants les uns des autres.



On vérifie alors que la somme des probabilités est bien égale à 1. $\sum P(X=k) = 1$

I. X est la variable aléatoire égale au nombre de buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

Les valeurs que peut prendre X sont donc 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10.

a : Le joueur réussit tous ses tirs au but s'il marque 5 buts à chaque série.

Comme la probabilité de marquer 5 buts durant une série est 0,2 et que les résultat des séries de tirs sont indépendants ; on a donc :

Probabilité de marqués 5 buts à chaque série = $(0,2)^2 = 0,04$.

b : On a vu que les valeurs que peut prendre X sont 6 ; – 7 ; – 8 ; – 9 ; – 10.

D'après l'arbre construit ; on obtient alors :

$p(X = 6) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

$p(X = 7) = 0,3 \times 0,5 + 05 \times 0,3 = 0,30$

$p(X = 8) = 0,3 \times 0,2 + 0,5 \times 0,5 + 0,2 \times 0,3 = 0,37$

$p(X = 9) = 0, \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 = 0,20$

$p(X = 10) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$.

On présente alors ces résultats sous forme de tableau :

Tableau : Loi de Probabilité de X					
$X = k$	6	7	8	9	10
$p(X = k)$	0,09	0,30	0,37	0,20	0,04

c : On vérifie que l'espérance de X est : $E[X] = \sum_k k \, . \, p(X = k) = 7{,}8$

II. L'entraînement est réussi si le joueur marque au moins 8 buts durent deux séries.
On veut $p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$.
D'après le tableau précédent ; on a donc :
$p(X \geq 8) = 0{,}37 + 0{,}20 + 0{,}04 = 0{,}61$. C'est bien la valeur demandée.

III. Y est la variable aléatoire égale au nombre de séances d'entraînement réussies ou succès en 10 séances d'entraînement.
Comme pour chaque séance ; la probabilité que la séance soit un succès est $p = 0{,}61$ et que les résultats des séances sont supposés indépendants les une des autres ; on voit alors que Y suit une loi Binomiale de paramètre ($n = 10$; $p = 0$; 61).
a : La probabilité que le joueur n'ait aucun échec lors des 10 séances est alors :
donc pour tout entier *k*, on a : $p\,(Y = k) = C_{10}^{k} \times 0{,}61^{k} \times 0{,}39^{10-k}$

b : La probabilité d'avoir exactement 6 succès est :
$p\,(Y = 6) = C_{10}^{6} \times 0{,}61^{6} \times 0{,}39^{4} \approx 0{,}2503$

c : La probabilité d'avoir au moins un succès est :
$p(Y \geq 1) = 1 - p\,(Y = 0) = 1 - 0{,}39^{10} \approx 0{,}99992$
III. Pour *n* séances d'entraînement de suite ; la probabilité que le joueur n'ait aucune succès est $(0{,}39)^{n}$. Donc la probabilité que le joueur ait au moins un succès est : $p_n = 1 - (0{,}39)^{n}$
On veut donc déterminer la plus petite valeur de *n* telle cette probabilité soit ≥ 0,99.
$1 - (0{,}39)^{n} \geq 0{,}99$
$0{,}01 \geq 0{,}39^{n}$
$\ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}39$
$n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}39}$
Le joueur a donc une probabilité de gagner au moins une fois 15 points supérieure à 0,9999 s'il joue au moins 23 parties de suite.