On se déplace sur les sommets ( A, B, C et D ) d'un tétraèdre sans jamais rester deux fois de suite sur le même sommet.

1. *a.* A partir d'un sommet donné, quels sommets peut-on rejoindre ?

*b.* En déduire les coefficients nuls de la matrice M de transition puis déterminer cette matrice, sachant que l'on fait l'hypothèse d'une marche aléatoire équiprobable.

2. Calculer quelques puissances successives de M à l'aide d'un logiciel.

On remarquera qu'il y a deux types de coefficients. Notons $u_n$ les coefficients diagonaux de $M^n$ et $v_n$ les autres.

*a.* Quel lien semble-t-il exister entre les suites ( $u_n$ ) et ( $v_n$ ) ? On ne s'intéressera donc par la suite qu'à la suite ( $u_n$ ) et pour tout $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ où $a_n$ et $b_n$ sont deux entiers naturels.

*b.* Quelle conjecture peut-on émettre sur le terme général de la suite ( $b_n$ ) ?

*c.* D'après les puissances successives de $M^n$ écrire les 6 premiers termes de ( $a_n$ )

*d.* Effectuer les sommes de deux termes consécutifs et émettre une conjecture sur la formule donnant $a_{n+1} + a_n$, pour tout $n \geq 1$

*e.* En déduire une expression de $a_5$ et de $a_4$ et en déduire qu'on l'on peut conjecturer que la formule donnant le terme général $a_n$ est, pour tout $n \geq 2$ : $a_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} (-3)^k$ .

*g.* En déduire la forme des termes généraux de ( $u_n$ ) et ( $v_n$ ).

3. *a.* Démontrer que $\dfrac{1}{3} u_n + \dfrac{2}{3} v_n = v_{n+1}$

**CORRECTION**

1. *a.* A partir d'un sommet donné, on peut rejoindre l'un des trois autres sauf ce sommet.

*b.* A partir d'un sommet donné, on peut rejoindre l'un des trois autres avec la même probabilité $\dfrac{1}{3}$, la marche aléatoire étant équiprobable donc M = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ; $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ ; $M^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} & \frac{20}{81} & \frac{20}{81} & \frac{20}{81} \\ \frac{20}{81} & \frac{7}{27} & \frac{20}{81} & \frac{20}{81} \\ \frac{20}{81} & \frac{20}{81} & \frac{7}{27} & \frac{20}{81} \\ \frac{20}{81} & \frac{20}{81} & \frac{20}{81} & \frac{7}{27} \end{pmatrix}$

*a.* Il semble que $u_{n+1} = v_n$.

*b.* Il semble que le terme général de la suite ( $b_n$ ) est $3^{n-1}$

*c.* D'après les puissances successives de $M^n$ écrire les 6 premiers termes de ( $a_n$ )

$u_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$ ; $u_3 = \dfrac{2}{9}$ ; $u_4 = \dfrac{7}{27}$ ; $u_5 = \dfrac{20}{81}$ ; $u_6 = \dfrac{61}{243}$ donc $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ ; $a_3 = 2$ ; $a_4 = 7$ ; $a_5 = 20$ ; $a_6 = 61$.

*d.* $a_1 + a_2 = 1$ ; $a_2 + a_3 = 3$ ; $a_3 + a_4 = 9$ ; $a_4 + a_5 = 27$ ; $a_5 + a_6 = 81$.

Il semble que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} + a_n = 3^{n-1}$.

*e.* $\begin{cases} a_4 + a_3 = 9 \\ -a_3 - a_2 = -3 \\ a_2 + a_1 = 1 \end{cases}$ donc en additionnant terme à terme : $a_4 = 3^2 - 3 + 1$ soit $a_4 = (-3)^2 + (-3) + 1$

$a_4 + a_5 = 27$ donc $a_5 = 3^3 - a_4 = 3^3 - [\,(-3)^2 + (-3) + 1\,]$ or $(-3)^3 = -3^3$ donc $a_5 = -(-3)^3 - (-3)^2 - (-3) - 1$
$a_5 = -[\,(-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1\,]$

On peut donc supposer que $a_n = (-1)^n\,[\,(-3)^{n-2} + (-3)^{n-3} + \ldots + (-3)^2 + (-3) + 1\,]$ soit $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-3)^k$ .

*g.* si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $(-3)^{n-2} + (-3)^{n-3} + \ldots + (-3)^2 + (-3) + 1 = \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{1-(-3)}$

$(-3)^{n-2} + (-3)^{n-3} + \ldots + (-3)^2 + (-3) + 1 = \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4}$

$a_n = (-1)^n \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4} = \dfrac{(-1)^n}{4}\,[\,1-(-3)^{n-1}\,]$, d'après la conjecture $b_n = 3^{n-1}$ donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4} \times \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$

$v_n = u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{4} \times \dfrac{1-(-3)^n}{3^n}$ .

3. *a.* $\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{M}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}^{n+1} = \begin{pmatrix} v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & u_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & u_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n & u_n \end{pmatrix}$$ donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n$ .